**Vorlesungsreihe aus dem Wintersemester 2011/12 und dem Sommersemester 2012**

# Homologische Algebra

Prof. Dr. Helmut Zöschinger

geTEXt von Viktor Kleen

## Inhaltsverzeichnis

# I. Kategorien

Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ ist ein 4-Tupel $(\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Mor}, K, I)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist eine Klasse von sogenannten *Objekten* $A, B, C, \dots$.
- Mor ordnet jedem Paar $(A, B)$ von Objekten eine Menge $\mathrm{Mor}(A, B)$ von sogenannten *Morphismen* zu (statt $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$ schreibt man auch $\alpha\colon A \longrightarrow B$), so dass aus $\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(C, D) \neq \emptyset$ stets folgt $A = C$ und $B = D$.
- $K$ ordnet jedem Tripel $(A, B, C)$ von Objekten eine Abbildung

$$\mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C), (\alpha, \beta) \longmapsto \beta\alpha$$

  zu, so dass für alle $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $\beta \in \mathrm{Mor}(B, C)$ und $\gamma \in \mathrm{Mor}(C, D)$ folgt, dass $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ (Assoziativität).
- $I$ ordnet jedem Objekt $A$ ein Element $1_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ zu, mit $\alpha 1_A = \alpha = 1_B \alpha$ für alle $\alpha\colon A \longrightarrow B$ (Identität).

Ein $\alpha\colon A \longrightarrow B$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $\beta\colon B \longrightarrow A$ gibt mit $\beta\alpha = 1_A$ und $\alpha\beta = 1_B$. In diesem Fall ist auch $\beta$ ein Isomorphismus und $\beta$ ist durch $\alpha$ eindeutig bestimmt und wird auch mit $\alpha^{-1}$ bezeichnet.

Ein $\alpha\colon A \longrightarrow B$ heißt *Monomorphismus*, wenn aus $\alpha f = \alpha g$ mit $f, g\colon C \longrightarrow A$ stets folgt $f = g$.

Ein $\alpha\colon A \longrightarrow B$ heißt *Epimorphismus*, wenn aus $f\alpha = g\alpha$ mit $f, g\colon B \longrightarrow C$ stets folgt $f = g$.

**Beispiele.**

(i) Man hat eine Kategorie **Men** aller Mengen, für die die Objekte die Klasse aller Mengen, die Morphismen alle Abbildungen $A \longrightarrow B$, $K$ die Hintereinanderausführung von Abbildungn und $I$ die identischen Abbildungen sind. Hier sind Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen, Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen und Isomorphismen genau die bijektiven Abbildungen.

(ii) Man hat die Kategorie **Top** aller topologischen Räume und aller stetigen Abbildungen. Hier sind die Monomorphismen genau die stetigen und injektiven Abbildungen, aber nicht jede bijektive stetige Abbildung ist ein Isomorphismus. Ist $X$ eine Menge mit zwei Topologien $\mathfrak{T}_1 \subsetneq \mathfrak{T}_2$, so ist $\alpha\colon (X, \mathfrak{T}_2) \longrightarrow (X, \mathfrak{T}_1), x \longmapsto x$ ein Epimorphismus und ein Monomorphismus, aber kein Isomorphismus.

(iii) Sei $R$ ein Ring. Ein $R$-Linksmodul ist ein Paar $(A, m)$, worin $A$ eine abelsche Gruppe ist und $m\colon R \times A \longrightarrow A, (r, a) \longmapsto ra$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: $r(a+b) = ra+rb$, $(r+s)a = ra+sa$, $r(sa) = (rs)a$ und $1a = a$ für alle $r, s \in R$ und $a, b \in A$. Die Objekte der Kategorie $R$-**Mod** sind $R$-Linksmoduln, die Morphismen alle $R$-linearen Abbildungen $\alpha\colon A \longrightarrow B$, d.h. $\alpha(a_1 + a_2) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2)$

und $\alpha(ra) = r\alpha(a)$ für alle $r \in R$ und $a_1, a_2, a \in A$. Hier sind Monomorphismen genau die injektiven $R$-linearen Abbildungen, Epimorphismen genau die surjektiven $R$-linearen Abbildungen und Isomorphismen genau die bijektiven $R$-linearen Abbildungen.

(iv) Man hat die Kategorie **Rin** aller Ringe und Ringhomomorphismen. Hier sind nicht alle Epimorphismen surjektiv, denn zum Beispiel ist die Inklusion $\alpha\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus aber nicht surjektiv, denn für $f, g\colon \mathbb{Q} \longrightarrow T$ mit $f\alpha = g\alpha$ folgt $f(1/s)g(s) = f(1/s)f(s) = 1$ $(0 \neq s \in \mathbb{Z})$, d.h. $f(1/s) = f(1/s)g(s)g(1/s) = g(1/s)$ für alle $0 \neq s \in \mathbb{Z}$. Also folgt $f(r/s) = g(r/s)$ für alle $r/s \in \mathbb{Q}$, also $f = g$.

Ein $\alpha\colon A \longrightarrow B$ heißt *zerfallender Monomorphismus*, wenn es ein $\rho\colon B \longrightarrow A$ gibt mit $\rho\alpha = 1_A$. Dann ist $\alpha$ ein Monomorphismus und $\rho$ heißt eine *Retraktion* (oder ein *Linksinverses*) von $\alpha$.

Entsprechend heißt $\alpha$ *zerfallender Epimorphismus*, wenn es ein $\sigma\colon B \longrightarrow A$ gibt mit $\alpha\sigma = 1_B$. Dann ist $\alpha$ ein Epimorphismus und $\sigma$ heißt ein *Schnitt* (oder *Rechtsinverses*) von $\alpha$.

**Lemma 1.** *In $R$-**Mod** gilt:*

- $\alpha\colon A \longrightarrow B$ *ist genau dann ein zerfallender Monomorphismus, wenn $\alpha$ ein Monomorphismus ist und* $\operatorname{im}(\alpha) \subset^{\oplus} B$.
- $\alpha\colon A \longrightarrow B$ *ist genau dann ein zerfallender Epimorphismus, wenn $\alpha$ ein Epimorphismus ist und* $\ker(\alpha) \subset^{\oplus} A$.

*Beweis.* Sei zuerst $\alpha\colon A \longrightarrow B$ ein zerfallender Monomorphismus, d.h. $\rho\alpha = 1_A$ für ein geeignetes $\rho\colon B \longrightarrow A$. Dann ist $\operatorname{im}(\alpha) \oplus \ker(\rho) = B$, denn es ist $b = \alpha\rho(b) + (b - \alpha\rho(b))$ für alle $b \in B$ und $\alpha(a) \in \ker(\rho)$ impliziert $0 = \rho\alpha(a) = a$.

Ist umgekehrt $\operatorname{im}(\alpha) \oplus Y = B$, so ist die Abbildung $\rho\colon B \longrightarrow A, b \longmapsto a$ mit $b = \alpha(a) + y$ wohldefiniert, denn ist $b = \alpha(a') + y'$, so ist $\alpha(a') = \alpha(a)$ und $y' = y$, also $a' = a$, $R$-linear und ein Linksinverses von $\alpha$. □

Ein Objekt $N$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Nullobjekt*, wenn für alle Objekte $A$ von $\mathcal{C}$ gilt $|\operatorname{Mor}(A, N)| = 1 = |\operatorname{Mor}(N, A)|$. Für jedes Paar $A, B$ ist dann $0^A_B := A \longrightarrow N \longrightarrow B$ ein ausgezeichnetes Element und es gilt $0^A_B f = 0^X_B$ für alle $f\colon X \longrightarrow A$, entsprechend $g0^A_B = 0^A_C$ für alle $g\colon B \longrightarrow C$. Für ein zweites Nullobjekt $N'$ gilt automatisch $N' \cong N$, denn mit $\alpha\colon N \longrightarrow N'$ und $\beta\colon N' \longrightarrow N$ folgt $\beta\alpha = 1_N$ und $\alpha\beta = 1_{N'}$, und man erhält dieselben „Nullmorphismen“, denn mit ${0'}^A_B = A \longrightarrow N' \longrightarrow B$ erhält man ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & \\
A \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & B \\
 & N' \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

d.h. $0_B^A = 0'^A_B$.

**Beispiele.** Die Kategorien **Men**, **Top** und **Rin** haben kein Nullobjekt, die Kategorie $R$-**Mod** sehr wohl.

Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit einer Familie $(\pi_i \colon A \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ von Morphismen heißt *Produkt* der $A_i$, wenn es zu jeder Familie $(f_i \colon X \longrightarrow A)_{i\in I}$ genau einen Morpismus $f \colon X \longrightarrow A$ gibt mit $\pi_i f = f_i$ für alle $i \in I$:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, dash, "\pi_i"] \\
X \arrow[ur, dashed, dash, "f"] \arrow[r, dash, "f_i"'] & A_i
\end{tikzcd}
$$

$A$ ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und man schreibt $A = \prod_{i\in I} A_i$: Ist $A'$ ein weiteres Produkt der $A_i$, $\pi_i' \colon A' \longrightarrow A_i$, so existieren kommutative Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, dash, "\pi_i"] \\
A' \arrow[ur, dashed, dash, "f"] \arrow[r, dash, "\pi_i'"'] & A_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, dash, "\pi_i"] \\
A' \arrow[ur, dashed, dash, "g"] \arrow[r, dash, "\pi_i'"'] & A_i
\end{tikzcd}
$$

für dadurch eindeutig bestimmte $f$ und $g$, und $\pi_i fg = \pi_i$ für alle $i \in I$ liefert $fg = 1_A$, ebenso gilt $gf = 1_A$.

Dual heißt $(\varepsilon_i \colon B_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ ein *Koprodukt*, wenn es zu jeder Familie $(g_i \colon B_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ genau einen Morphismus $g \colon B \longrightarrow Y$ gibt mit $g\varepsilon_i = g_i$ für alle $i \in I$. Die Eindeutigkeit von $B$ bis auf Isomorphie folgt wie oben und man schreibt $B = \coprod_{i\in I} B_i$.

**Satz 1.** *In der Kategorie $R$-**Mod** existieren Produkte und Koprodukte.*

*Beweis.* Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Definiert man $A = \{(a_i)_{i\in I} \colon a_i \in A_i\}$ und $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$, $r(a_i) = (ra_i)$, so ist $A$ ein $R$-Linksmodul und die Abbildungen $\pi_j \colon A \longrightarrow A_j, (a_i) \longmapsto a_j$ sind $R$-linear. Dann ist $(\pi_i \colon A \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ ein Produkt der $A_i$, denn zu $(f_i \colon X \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ ist $f \colon X \longrightarrow A, x \longmapsto (f_i(x))_{i\in I}$ $R$-linear sowie $\pi_i f = f_i$ für alle $i \in I$, und bei einer zweiten Lösung, d.h. $g\colon X \longrightarrow A$ mit $\pi_i g = f_i$ für alle $i \in I$, folgt $\pi_i g(x) = \pi_i f(x)$ für alle $i \in I$ und $x \in X$, also $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

Für das Koprodukt sei $B = \{(a_i) \in A\colon \text{fast alle } a_i = 0\}$. Dann ist $B$ ein $R$-Linksmodul, nämlich ein Untermodul von $A$, und mit den $R$-linearen Abbildungen $\varepsilon_i(a_i) = (\delta_{ij} a_i)_{i\in I}$ ist $(\varepsilon_i\colon A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ ein Koprodukt der $A_i$. Denn zu $(g_i\colon A_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ ist die Abbildung $g\colon B \longrightarrow Y, (a_i) \longmapsto \sum_{i\in I} g_i(a_i)$ sinnvoll und $R$-linear sowie $g\varepsilon_i = g_i$ für alle $i \in I$. Ist $h\colon B \longrightarrow Y$ ein zweiter $R$-Homomorphismus mit $h\varepsilon_i = g_i$ für alle $i \in I$, folgt für alle $(a_i) \in B$, dass

$$h((a_i)) = h\Big(\sum_{i\in I} \varepsilon_i(a_i)\Big) = \sum_{i\in I} h\varepsilon_i(a_i) = \sum_{i\in I} g_i(a_i) = g((a_i)). \qquad \square$$

In der Kategorie $R$-**Mod** verstehen wir unter $\prod_{i\in I} A_i$ immer den oben konstruierten Modul $A$ und unter $\coprod_{i\in I} A_i$ immer den Untermodul $B \subset A$. Sind alle $A_i = M$, schreibt man für $\prod_{i\in I} A_i$ auch $M^I$ und für $\coprod_{i\in I} A_i$ auch $M^{(I)}$.

Ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Faserprodukt* (pullback) von $\alpha$ und $\beta$, wenn es zu jedem kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dash, "f'"] \arrow[d, dash, "g'"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

genau ein $\delta\colon X \longrightarrow D$ gibt mit $f\delta = f'$ und $g\delta = g'$. Wieder ist $D$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: Ist auch

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, dash, "f'"] \arrow[d, dash, "g'"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt von $\alpha$ und $\beta$, so existiert $\delta\colon D' \longrightarrow D$ mit $g\delta = g'$ und $f\delta = f'$ und $\delta'\colon D \longrightarrow D'$ mit $g'\delta' = g$ und $f'\delta' = f$. Es folgt $f\delta\delta' = f$ und $g\delta\delta' = g$, also wegen der Eindeutigkeit $\delta\delta' = 1_D$. Ebenso ist $\delta'\delta = 1_{D'}$.

**Lemma 2.** *Ist*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

*ein Faserprodukt in $\mathcal{C}$, so gilt:*

(i) *Ist $\alpha$ ein Monomorphismus, so auch $f$.*

(ii) *Genau dann ist $\beta = \alpha\varphi$ für ein $\varphi \colon B \longrightarrow A$, wenn $f$ ein zerfallender Epimorphismus ist.*

(iii) *Ist $\alpha$ ein Isomorphismus, so auch $f$.*

*Beweis.*

(i) Sei $fu = fv$ für gewisse $u, v \colon X \longrightarrow D$. Dann ist in

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dash, "u"] \arrow[dr, dash, dashed, "v"', shift right] \arrow[drr, dash, bend left, "fu=fv"] \arrow[ddr, dash, bend right, "gu"'] & & \\ & D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ & A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

alles kommutativ, aber auch $gv = gu$, denn in $\alpha gv = \beta fv = \beta fu = \alpha gu$ kann man $\alpha$ kürzen. Also ist $v = u$.

(ii) Sei zuerst $\beta = \alpha\varphi$ mit $\varphi \colon B \longrightarrow A$. Man hat

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dash, dashed, "\delta"] \arrow[drr, dash, bend left, "1_B"] \arrow[ddr, dash, bend right, "\varphi"'] & & \\ & D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \arrow[dl, dash, "\varphi"] \\ & A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

Also existiert ein $\delta \colon B \longrightarrow D$ mit $g\delta = \varphi$ und $f\delta = 1_B$. Umgekehrt folgt aus $f\sigma = 1_B$, dass $\beta = \beta f\sigma = \alpha(g\sigma)$.

(iii) $f$ ist ein Monomorphismus nach 1 und $f\sigma = 1_B$ nach 2, da $\beta = \alpha(\alpha^{-1}\beta)$. Damit folgt $f\sigma f = f$, also $\sigma f = 1_D$. □

Dual heißt ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

*Fasersumme*, wenn es zu jedem kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta'"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha'"'] & Y \end{tikzcd}$$

genau einen Morphismus $\gamma\colon C \longrightarrow Y$ gibt mit $\gamma\alpha = \alpha'$ und $\gamma\beta = \beta'$. Wieder ist $C$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und in jeder Fasersumme gilt:

(i) Ist $f$ ein Epimorphismus, so auch $\alpha$.

(ii) Genau dann ist $g = \varphi f$ für ein $\varphi\colon B \longrightarrow A$, wenn $\alpha$ ein zerfallender Monomorphismus ist.

(iii) Ist $f$ ein Isomorphismus, so auch $\alpha$.

**Satz 2.** *In der Kategorie R-**Mod** existieren Faserprodukte und Fasersummen.*

*Beweis.* Zu

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

definiert man $P = \{(a, b) \in A \times B\colon \alpha(a) = \beta(b)\}$ mit den Projektionen $f\colon P \longrightarrow B$, $g\colon P \longrightarrow A$. Dann ist $P$ ein $R$-Modul, $f$ und $g$ $R$-linear sowie $\beta f = \alpha g$. Zu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dash, "f'"] \arrow[d, dash, "g'"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

ist $\delta\colon X \longrightarrow P, x \longmapsto (g'(x), f'(x))$ sinnvoll, $R$-linear, sowie $f\delta = f'$ und $g\delta = g'$. Für eine zweite Lösung $\delta_1\colon X \longrightarrow P$ mit $f\delta_1 = f'$ und $g\delta_1 = g'$ folgt mit $\delta_1(x) = (a, b)$, dass $f'(x) = b$ und $g'(x) = a$, also $\delta_1 = \delta$.

Zu

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

definiert man $S = A \times B/\{(g(x), -f(x)) \colon x \in D\}$, sowie $\beta \colon B \longrightarrow S, b \longmapsto \overline{(0,b)}$ und $\alpha \colon A \longrightarrow S, a \longmapsto \overline{(a,0)}$. Dann ist $S$ ein $R$-Modul, die $\alpha$ und $\beta$ sind $R$-linear, sowie $\alpha g = \beta f$ und

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

ist eine Fasersumme. $\square$

**Folgerung 1.** Für ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

in $R$-**Mod** betrachten wir folgende Eigenschaft:

($*$) Zu $\alpha(a) = \beta(b)$ gebe es stets ein $x \in D$ mit $g(x) = a$ und $f(x) = b$.

Dann ist das Quadrat genau dann ein Faserprodukt, wenn ($*$) gilt und $\ker(f) \cap \ker(g) = 0$ ist und genau dann eine Fasersumme, wenn ($*$) gilt und $\mathrm{im}(\alpha) + \mathrm{im}(\beta) = C$ ist.

*Beweis.* Sei $P$ wie in Satz 2, d.h.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rrd, dash, bend left, "f'"] \arrow[ddr, dash, bend right, "g'"'] \arrow[dr, dash, dashed, "\delta"] & & \\ & D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ & A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

Genau dann ist das betrachtete Quadrat ein Faserprodukt, wenn $\delta$ ein Isomorphismus ist; $\delta$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn für alle $x \in D$ mit $\delta(x) = 0$, d.h.

$f(x) = 0 = g(x)$, bereits $x = 0$ folgt, d.h. genau dann, wenn $\ker(f) \cap \ker(g) = 0$ ist. Außerdem ist $\delta$ genau dann ein Epimorphismus, wenn für alle $\alpha(a) = \beta(b)$ stets ein $x \in D$ existiert mit $\delta(x) = (a, b)$, d.h. $(*)$ gilt. □

**Folgerung 2.** Ist $A$ ein Untermodul von $C$, so ist

$$\begin{tikzcd}
\beta^{-1}(A) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dashed] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\
A \arrow[r, dash] & C
\end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt. Ist $E$ ein Untermodul von $D$, so ist

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "g"'] & D/E \arrow[d, dash, dashed] \\
A \arrow[r, dash] & A/g(E)
\end{tikzcd}$$

eine Fasersumme.

**Folgerung 3.** Ist

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\
A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C
\end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt in $R$-**Mod**, so ist $\ker(f) \cong \ker(\alpha)$, Ist das Quadrat eine Fasersumme, so ist $\operatorname{coker}(f) \cong \operatorname{coker}(\alpha)$

*Beweis.* In

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dashed, "\omega"'] & D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\
\ker(\alpha) \arrow[r, dash] & A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C
\end{tikzcd}$$

ist $\omega$ ein Monomorphismus, aber auch ein Epimorphismus, denn $a \in \ker(\alpha)$ impliziert $\alpha(a) = \beta(0)$, d.h. mit $(*)$ existiert ein $x \in D$ mit $g(x) = a$ und $f(x) = 0$. □

# II. Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt $A$ von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(A)$ in $\mathcal{D}$ zu und jedem $\alpha \in \mathrm{Mor}(A,B)$ ein $F(\alpha) \in \mathrm{Mor}(F(A),F(B))$, so dass gilt $F(1_A) = 1_{F(A)}$ und $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\alpha\colon A \longrightarrow B$ und $\beta\colon B \longrightarrow C$. Speziell wird jeder zerfallende Monomorphismus (zerfallende Epimorphismus, Isomorphismus) $\alpha$ in $\mathcal{C}$ zu einem zerfallenden Monomorphismus (zerfallenden Epimorphismus, Isomorphismus) $F(\alpha)$ in $\mathcal{D}$.

**Beispiele.**

(i) Jedes Objekt $X$ in $\mathcal{C}$ liefert einen Funktor $F = \mathrm{Mor}(X,-)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Men}$ durch $F(A) = \mathrm{Mor}(X,A)$ und $F(\alpha)\colon\ \mathrm{Mor}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Mor}(X,B), f \longmapsto \alpha f$.

(ii) Sei $G$ eine Gruppe und $G'$ die von allen Elementen $xyx^{-1}y^{-1}$ erzeugte Untergruppe. Sie ist sogar ein Normalteiler von $G$, und zwar der kleinste Normalteiler $N$, so dass $G/N$ abelsch ist. $G/G'$ heißt auch die *Abelianisierung* von $G$. Ist $A$ eine abelsche Gruppe, so gibt es zu jedem Homomorphismus $\varphi\colon G \longrightarrow A$ genau einen Homomorphismus $\widehat{\varphi}\colon G/G' \longrightarrow A$ mit $\widehat{\varphi}\nu = \varphi$, d.h.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/G' \arrow[d, "\widehat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Damit erhält man den Funktor $F\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ durch $F(G) = G/G'$ und

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & G/G' \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ H \arrow[r] & H/H' \end{tikzcd}$$

(iii) Sei $R$ ein Ring und $I$ eine Menge. Der $R$-Linksmodul $R^{(I)}$ hat die $e_j = (\delta_{ij})_{i\in I}$, $j \in I$, als Basis und heißt der *freie $R$-Linksmodul* über der Menge $I$. Ist $A$ ein $R$-Linksmodul, so gibt es zu jeder Abbildung $\varphi\colon I \longrightarrow A$ genau einen $R$-Homomorphismus $\widehat{\varphi}\colon R^{(I)} \longrightarrow A$ mit $\widehat{\varphi}(e_j) = \varphi(j)$ für alle $j \in I$, d.h.

$$\begin{tikzcd} R^{(I)} \arrow[r, dashed, "\widehat{\varphi}"] & A \\ I \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Damit erhält man einen Funktor $F\colon \mathbf{Men} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ durch $F(I) = R^{(I)}$ und

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\alpha"'] & R^{(I)} \arrow[d, dash, dashed, "F(\alpha)"] \\
K \arrow[r, dash] & R^{(K)}
\end{tikzcd}$$

(iv) In $R$-**Mod** wird die Menge $\mathrm{Mor}(X, A)$ zu einer abelschen Gruppe durch die Operation $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und dafür schreibt man $\mathrm{Hom}_R(X, A)$. Die von $\alpha\colon A \longrightarrow B$ induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_R(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, B), f \longmapsto \alpha f$ ist dann ein Gruppenhomomorphismus und damit erhält man einen Funktor $F = \mathrm{Hom}_R(X, -)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ durch $F(A) = \mathrm{Hom}_R(X, A)$ und $F(\alpha)(f) = \alpha f$.

(v) Sei $M_R$ ein $R$-Rechtsmodul und ${}_RA$ ein $R$-Linksmodul. Im freien $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^{(M\times A)}$ sei $H$ der von allen Elementen $e_{(x+x',a)} - e_{(x,a)} - e_{(x',a)}$ und $e_{(x,a+a')} - e_{(x,a)} - e_{(x,a')}$ und $e_{(xr,a)} - e_{(x,ra)}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul. Dann heißt $M \otimes_R A = \mathbb{Z}^{(M\times A)}/H$ das *Tensorprodukt* von $M$ und $A$. Statt $\overline{e_{(x,a)}} = e_{(x,a)} + H$ schreibt man $x \otimes a$, und damit gilt $(x + x') \otimes a = x \otimes a + x' \otimes a$, $x \otimes (a + a') = x \otimes a + x \otimes a'$ und $(xr) \otimes a = x \otimes (ra)$. Insbesondere gilt $0 \otimes a = 0 = x \otimes 0$. Jedes Element von $M \otimes_R A$ ist von der Form $\sum_i x_i \otimes a_i$.
Ist $G$ eine abelsche Gruppe, so heißt $\varphi\colon M \times A \longrightarrow G$ *tensoriell*, wenn $\varphi(x+x', a) = \varphi(x, a) + \varphi(x', a)$, $\varphi(x, a+a') = \varphi(x, a) + \varphi(x, a')$ und $\varphi(xr, a) = \varphi(x, ra)$ gilt. Zum Beispiel ist die Abbildung $\tau\colon M \times A \longrightarrow M \otimes_R A$ tensoriell. Zu jeder tensoriellen Abbildung $\varphi\colon M \times A \longrightarrow G$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\widehat{\varphi}\colon M \otimes_R A \longrightarrow G$ mit $\widehat{\varphi}\tau = \varphi$, d.h.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r, dash, dashed, "\widehat{\varphi}"] & G \\
M \times A \arrow[u, dash, "\tau"] \arrow[ur, dash, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

denn der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^{(M\times A)} \longrightarrow G, e_{(x,a)} \longmapsto \varphi(x, a)$ annulliert die Untergruppe $H$, induziert also $\widehat{\varphi}\colon M \otimes_R A \longrightarrow G$ mit $\widehat{\varphi}(x \otimes a) = \varphi(x, a)$. Leistet ein Gruppenhomomorphismus $g\colon M \otimes_R A \longrightarrow G$ dasselbe, folgt

$$g\Big(\sum_i x_i \otimes a_i\Big) = \sum_i g(x_i \otimes a_i) = \sum_i \varphi(x_i, a_i) = \sum_i \widehat{\varphi}(x_i \otimes a_i) = \widehat{\varphi}\Big(\sum_i x_i \otimes a_i\Big),$$

also $g = \widehat{\varphi}$.
Sind $\mu\colon M_R \longrightarrow N_R$ und $\alpha\colon {}_RA \longrightarrow {}_RB$ linear, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\mu \otimes \alpha\colon M \otimes_R A \longrightarrow N \otimes_R B$ mit $x \otimes a \longmapsto \mu(x) \otimes \alpha(a)$, denn die

Abbildung $\tau_{N,B}(\mu \times \alpha)$ ist tensoriell, induziert also $\widehat{\varphi} =: \mu \otimes \alpha$.

$$\begin{tikzcd} M \times A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\mu\times\alpha"'] & M \otimes_R A \arrow[d, dashed, dash, "\widehat{\varphi}"] \\ N \times B \arrow[r, dash] & N \otimes_R B \end{tikzcd}$$

Damit erhält man für jedes $M_R$ einen Funktor $F = M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ mit $F(A) = M \otimes_R A$ und $F(\alpha) = 1_M \otimes \alpha$.

Ein *kontravarianter* Funktor $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ dreht die Pfeile um, d.h. er ordnet jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ und jedem $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$ ein $F(\alpha) \in \mathrm{Mor}(F(B), F(A))$ zu mit $F(1_A) = 1_{F(A)}$ und $F(\beta\alpha) = F(\alpha)F(\beta)$. Die bisher betrachteten Funktoren heißen dann *kovariant*.

**Beispiele.**

(vi) Für jeden $R$-Linksmodul ${}_RY$ ist $F := \mathrm{Hom}_R(-, Y)$ ein kontravarianter Funktor $R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, denn für $\alpha\colon A \longrightarrow B$ und $\beta\colon B \longrightarrow C$ ist $F(\beta\alpha) = F(\alpha)F(\beta)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_R(C, Y) & \text{——} & \mathrm{Hom}_R(B, Y) & \text{——} & \mathrm{Hom}_R(A, Y) \\ f & \longmapsto & f\beta & \longmapsto & f\beta\alpha \end{array}$$

(vii) Sei $A$ ein kommutativer Ring und $\mathrm{Spec}(A)$ die Menge seiner Primideale. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ sei $D(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\colon \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}\}$, und dann heißt $\mathfrak{T}_A := \{D(\mathfrak{a})\colon \mathfrak{a} \subset A \text{ ein Ideal}\}$ die Zariskitopologie auf $\mathrm{Spec}(A)$. Ist $\alpha\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, so ist die Abbildung $\alpha^*\colon \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A), \mathfrak{q} \longmapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ sinnvoll, d.h. $\alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ ein Primideal in $A$, und bezüglich $\mathfrak{T}_B$ und $\mathfrak{T}_A$ stetig. Damit wird auf der Kategorie $\mathcal{C}$ aller kommutativen Ringe $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Top}$ ein kontravarianter Funktor mit $F(A) = (\mathrm{Spec}(A), \mathfrak{T}_A)$ und $F(\alpha) = \alpha^*$.
Nicht jeder topologische Raum ist von der Form $F(A)$, denn stets ist $\mathfrak{T}_A$ quasikompakt: Ist $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i)$, so folgt $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = R$, denn jedes echte Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ liegt in einem Primideal, also $\mathfrak{a}_{i_1} + \cdots + \mathfrak{a}_{i_n} = R$ für geeignete $i_1, \ldots, i_n$ und damit $\mathrm{Spec}(R) = D(\mathfrak{a}_{i_1}) \cup \cdots \cup D(\mathfrak{a}_{i_n})$.

Sind $R$ und $T$ Ringe und ${}_TM_R$ ein $T$-$R$-Bimodul, so wird die abelsche Gruppe $M \otimes_R A$ zu einem $T$-Linksmodul durch $t.u = (\hat{t} \otimes 1_A)(u)$ wobei $\hat{t}\colon M_R \longrightarrow M_R, x \longmapsto tx$. Für jeden $R$-Homomorphismus $\alpha\colon A \longrightarrow A'$ ist dann $1_M \otimes \alpha\colon M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R A'$ sogar $T$-linear. Also ist jetzt $M \otimes_R -$ ein Funktor $R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$.

Dual wird mit einem $T$-$R$-Bimodul ${}_TM_R$ und einem $T$-Linksmodul ${}_TY$ die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_T(M, Y)$ zu einem $R$-Linksmodul durch $(r.f)(x) = f(xr)$, und für jeden $T$-Homomorphismus $\gamma\colon Y \longrightarrow Y'$ ist dann $\gamma_*\colon \mathrm{Hom}_T(M, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_T(M, Y'), f \longmapsto \gamma f$ sogar $R$-linear. Also ist jetzt $\mathrm{Hom}_T(M, -)$ ein Funktor $T\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$.

**Satz 1.** *Sind $_TM_R$, $_RA$ und $_TY$, so gibt es einen Gruppenisomorphismus*

$$\omega\colon \operatorname{Hom}_T(M \otimes_R A, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_T(M, Y)).$$

*Beweis.* Ist $f\colon M \otimes_R A \longrightarrow Y$ $T$-linear, wird für jedes $a \in A$ auch die Abbildung $f_a\colon M \longrightarrow Y, x \longmapsto f(x \otimes a)$ $T$-linear, denn $f_a(tx) = f((tx) \otimes a) = f(t(x \otimes a)) = tf_a(x)$ und damit $\overline{f}\colon A \longrightarrow \operatorname{Hom}_T(M, Y), a \longmapsto f_a$ ein $R$-Homomorphismus. Also ist $\omega(f) = \overline{f}$ sinnvoll und natürlich additiv.

Ist $\alpha\colon A \longrightarrow \operatorname{Hom}_T(M, Y)$ $R$-linear, wird $M \times A \longrightarrow Y, (x, a) \longmapsto \alpha(a)(x)$ tensoriell, induziert also einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{\alpha}\colon M \otimes_R A \longrightarrow Y$, der sogar $T$-linear ist. Wegen $\widetilde{\overline{f}} = f$ und $\overline{\widetilde{\alpha}} = \alpha$ ist $\omega$ bijektiv. □

**Bemerkung.** In der Situation $M_R$, $_RA_S$, $Y_S$ wird $M \otimes_R A$ zu einem $S$-Rechtsmodul durch $u.s = (1 \otimes \hat{s})(u)$ wie oben und $\operatorname{Hom}_S(A, Y)$ zu einem $R$-Rechtsmodul durch $(g.r)(a) = g(ra)$. Dann erhält man entsprechend einen Gruppenisomorphsimus

$$\omega\colon \operatorname{Hom}_S(M \otimes_R A, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(A, Y)).$$

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ beliebige Kategorien, $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. $F$ heißt *linksadjungiert* zu $G$ (oder $G$ *rechtsadjungiert* zu $F$, oder $(F, G)$ ein *adjungiertes Paar*), wenn es zu jedem $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ und jedem $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$ eine „kanonische“ Bijektion

$$\omega\colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, G(Y))$$

gibt, d.h. für alle $\beta\colon A' \longrightarrow A$ und $g\colon Y \longrightarrow Y'$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), Y) \arrow[r, dash, "\sim", "\omega"'] \arrow[d, dash] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, G(Y)) \arrow[d, dash] \\
\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A'), Y') \arrow[r, dash, "\sim", "\omega"'] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A', G(Y'))
\end{tikzcd}$$

kommutativ, d.h. für jedes $f\colon F(A) \longrightarrow Y$ ist $G(g)\omega(f)\beta = \omega(gfF(\beta))$.

**Beispiel 1.** Das Tensorprodukt ist linksadjungiert zum Hom-Funktor.

*Beweis.* Sei $_TM_R$ ein $T$-$R$-Bimodul und $F = M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ und $G = \operatorname{Hom}_T(M, -)\colon T\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$. Der in Satz 1 konstruierte Gruppenisomorphismus

$$\omega\colon \operatorname{Hom}_T(M \otimes_R A, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_T(M, Y))$$

ist „kanonisch“, d.h. es ist kommutativ

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_T(M \otimes_R A, Y) \arrow[r, dash, "\sim", "\omega"'] \arrow[d, dash] & \operatorname{Hom}_T(A, \operatorname{Hom}_T(M, Y)) \arrow[d, dash] \\
\operatorname{Hom}_T(M \otimes_R A', Y') \arrow[r, dash, "\sim", "\omega"'] & \operatorname{Hom}_T(A', \operatorname{Hom}_T(M, Y'))
\end{tikzcd}$$

denn ist $f \in \mathrm{Hom}_T(M \otimes_R A, Y)$, so hat man

$$\omega(gf(1 \otimes \beta))(a')(x) = gf(x \otimes \beta a') = G(g)\omega(f)\beta(a')(x). \qquad \square$$

**Beispiel 2.** Der freie Funktor ist linksadjungiert zum Vergissfunktor.

*Beweis.* Sei $F\colon \mathbf{Men} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}, I \longmapsto R^{(I)}$ wie in Beispiel 3. Der sogenannte Vergissfunktor $V\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Men}$ ordnet jedem $R$-Modul seine zugrundeliegende Menge zu. Ist $I$ eine Menge und $Y$ ein $R$-Linksmodul, so gibt es nach Beispiel 3 zu jeder Abbildung $\varphi\colon I \longrightarrow V(Y)$ genau einen $R$-Homomorphismus $\widehat{\varphi}\colon F(I) \longrightarrow Y$ mit $\widehat{\varphi}(e_j) = \varphi(j)$ für alle $j \in I$. Das liefert ein kanonische Bijektion

$$\omega\colon\ \mathrm{Hom}_R(F(I), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(I, V(Y)). \qquad \square$$

**Beispiel 3.** Die Abelianisierung ist linksadjungiert zur Einbettung.

*Beweis.* Sei $F\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ der Abelianisierungsfunktor, d.h. $F(A) = A/A'$ und $E\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ die Einbettung. Ist $A$ eine beliebige Gruppe und $Y$ abelsch, so gibt es nach Beispiel 2 zu jedem Homomorphismus $\varphi\colon A \longrightarrow E(Y)$ genau einen Homomorphismus $\widehat{\varphi}\colon F(A) \longrightarrow Y$ mit $\widehat{\varphi}\nu = \varphi$, $\nu\colon A \longrightarrow A/A'$. Das liefert eine kanonische Bijektion

$$\omega\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(F(A), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{\mathbf{Grp}}(A, E(Y)). \qquad \square$$

**Satz 2.** *Ist $f\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, so erhält $F$ Epimorphismen, Koprodukte und Fasersummen und $G$ erhält Monomorphismen, Produkte und Faserprodukte.*

*Beweis.* Ist zum Beispiel

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "g"'] & B \arrow[d, dash, "\beta"] \\ A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

eine Fasersumme, so folgt, dass

$$\begin{tikzcd} F(D) \arrow[r, dash, "F(f)"] \arrow[d, dash, "F(g)"'] & F(B) \arrow[d, dash, "F(\beta)"] \\ F(A) \arrow[r, dash, "F(\alpha)"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

eine Fasersumme ist, denn sei $uF(f) = vF(g)$ in $\mathcal{D}$, also $\overline{u}f = \overline{v}g$ in $\mathcal{C}$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\gamma\colon C \longrightarrow G(Y)$ mit $\gamma\beta = \overline{u}$ und $\gamma\alpha = \overline{v}$. Mit $\widetilde{\gamma}\colon F(C) \longrightarrow Y$ gilt dann $\widetilde{\gamma}F(\beta) = u$ und $\widetilde{\gamma}F(\alpha) = v$.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, no head, "f"] \arrow[d, no head, "g"'] & B \arrow[d, no head, "\beta"] \arrow[ddr, no head, bend left, "\overline{u}"] & \\
A \arrow[r, no head, "\alpha"'] \arrow[drr, no head, bend right, "\overline{v}"'] & C \arrow[dr, no head, dashed, "\gamma"] & \\
 & & G(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(D) \arrow[r, no head, "F(f)"] \arrow[d, no head, "F(g)"'] & F(B) \arrow[d, no head, "F(\beta)"] \arrow[ddr, no head, bend left, "u"] & \\
F(A) \arrow[r, no head, "F(\alpha)"'] \arrow[drr, no head, bend right, "v"'] & F(C) \arrow[dr, no head, dashed, "\widetilde{\gamma}"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Also erhält $F$ Fasersummen. $\square$

**Bemerkung.** Genau dann ist $\beta\colon B \longrightarrow C$ ein Epimorphismus, wenn

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, no head, "\beta"] \arrow[d, no head, "\beta"'] & C \arrow[d, no head, "1_C"] \\
C \arrow[r, no head, "1_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

eine Fasersumme ist.

Seien $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\eta\colon F_1 \longrightarrow F_2$ ordnet jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\eta_A\colon F_1(A) \longrightarrow F_2(A)$ in $\mathcal{D}$ zu, so dass für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, no head, "\eta_A"] \arrow[d, no head, "F_1(\alpha)"'] & F_2(A) \arrow[d, no head, "F_2(\alpha)"] \\
F_1(B) \arrow[r, no head, "\eta_B"'] & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind alle $\eta_A$ Isomorphismen, so heißt $\eta$ eine *natürliche Äquivalenz.*

**Beispiel 1.** Sei $I \subset R$ ein zweiseitiges Ideal und $A$ ein $R$-Linksmodul. Dann ist $IA = \{\sum_i r_i a_i\colon r_i \in I, a_i \in A\}$ ein Untermodul von ${}_RA$, also $F_1(A) := A/IA$ ein Funktor $R$-**Mod** $\longrightarrow$ $R$-**Mod**. Weil $R/I$ ein $R$-$R$-Bimodul ist, ist auch $F_2(A) := (R/I) \otimes_R A$ ein Funktor $R$-**Mod** $\longrightarrow$ $R$-**Mod**. Es gilt $F_1 \cong F_2$, denn der $R$-Homomorphismus $A \longrightarrow (R/I) \otimes_R A, a \longmapsto 1 \otimes a$ annulliert $IA$, induziert also einen $R$-Homomorphismus

$\eta_A\colon A/IA \longrightarrow (R/I) \otimes_R A$ und klar ist $\eta$ eine natürliche Transformation $F_1 \longrightarrow F_2$. Die Abbildung $(R/I) \times A \longrightarrow A/IA, (\overline{r}, a) \longmapsto \overline{ra}$ ist wohldefiniert und tensoriell, induziert also einen Gruppenhomomorphismus $\theta_A\colon R/I \otimes_R A \longrightarrow A/IA$, der sogar $R$-linear ist und die Umkehrabbildung von $\eta_A$ ist.

Dual liefert jedes zweiseitige Ideal $I \subset R$ auf der Kategorie $R$-**Mod** die Funktoren $G_1(Y) = \mathrm{Ann}_Y(I) = \{y \in Y : ry = 0\ \forall r \in I\}$ und $G_2(Y) = \mathrm{Hom}_R(R/I, Y)$ und man zeigt $G_1 \cong G_2$.

**Beispiel 2.** Ist $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, so definiert man $\varepsilon_A$ durch

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A)) \arrow[r, dash, "\omega"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, GF(A)) \\
1_{F(A)} \arrow[r, mapsto] & \varepsilon_A
\end{tikzcd}$$

beziehungsweise $\delta_Y$ durch

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \arrow[r, dash, "\omega"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \\
\delta_Y \arrow[r, mapsto] & 1_{G(Y)}
\end{tikzcd}$$

und dann sind $\varepsilon\colon I_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ bzw. $\delta\colon FG \longrightarrow I_{\mathcal{D}}$ natürliche Transformationen, denn etwa folgt aus $\alpha\colon A \longrightarrow B$ und $F(\alpha)1_{F(A)} = 1_{F(B)}F(\alpha)$ mit dem kanonischen $\omega$, dass $GF(\alpha)\varepsilon_A = \varepsilon_B\alpha$, d.h.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash, "\varepsilon_A"] \arrow[d, dash, "\alpha"'] & GF(A) \arrow[d, dash, "GF(\alpha)"] \\
B \arrow[r, dash, "\varepsilon_B"'] & GF(B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Die natürliche Transformation $\varepsilon$ heißt die *Eins* des adjungierten Paares $(F, G)$ und $\delta$ die *Koeins*. Beide liefern eine Berechnung von $\omega\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, G(Y))$ und $\omega^{-1}$, nämlich ist $\overline{f} = \omega(f) = G(f)\varepsilon_A$ für $f\colon F(A) \longrightarrow Y$ und $\widetilde{\alpha} = \omega^{-1}(\alpha) = \delta_Y F(\alpha)$ für $\alpha\colon A \longrightarrow G(Y)$.

**Lemma** (Yoneda)**.** *Ist $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow$ **Men** und $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, so entsprechen die natürlichen Transformationen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -) \longrightarrow F$ genau den Elementen von $F(X)$.*

*Beweis.* Die Zuordnung sei $\eta \longmapsto \eta_X(1_X)$. Sie ist injektiv, denn für alle $f\colon X \longrightarrow A$ ist

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X) \arrow[r, dash, "\eta_X"] \arrow[d, dash, "f_*"'] & F(X) \arrow[d, dash, "F(f)"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) \arrow[r, dash, "\eta_A"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, d.h. $\eta_A(f) = F(f)(\eta_X(1_X))$. Gilt für eine natürliche Transformation $\theta$ auch $\eta_X(1_X) = \theta_X(1_X)$, folgt $\eta_A(f) = F(f)(\eta_X(1_X)) = \theta_A(f)$, $\eta_A = \theta_A$, $\eta = \theta$.

Sie ist surjektiv, denn für $u \in F(X)$ ist $\eta_A\colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) \longrightarrow F(A), f \longmapsto F(f)(u)$ eine Abbildung, die natürlich in $A$ ist, d.h.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) \arrow[r, dash, "\eta_A"] \arrow[d, dash, "\alpha_*"'] & F(A) \arrow[d, dash, "F(\alpha)"] \\
\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B) \arrow[r, dash, "\eta_B"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ: $(F(\alpha) \circ \eta_A)(f) = F(\alpha)F(f)(u) = \eta_B(\alpha f) = (\eta_B \circ \alpha_*)(f)$. □

**Folgerung 1.** Die natürlichen Transformationen $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -) \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ entsprechen genau den Morphismen $Y \longrightarrow X$, gehört $h$ zu $\eta$, so gilt $\eta_A(f) = fh$. Genau dann ist $\eta$ eine natürliche Äquivalenz, wenn $h$ ein Isomorphismus ist.

*Beweis.* $\eta_X\colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X) \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X), 1_X \longmapsto h$ liefert nach eben $\eta_A(f) = f_*(h) = fh$. Genau dann ist $\eta$ eine natürliche Äquivalenz, wenn es eine natürliche Transformation $\theta\colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, -) \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -)$ gibt mit $\theta_A\eta_A = 1_A$, $\eta_A\theta_A = 1_A$ für alle $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$, d.h. es gibt einen Morphismus $g\colon X \longrightarrow Y$ mit $gh = 1_Y$, $hg = 1_X$. □

**Folgerung 2** (Eindeutigkeit des Adjungierten)**.** Sind $F_1$ und $F_2$ beide linksadjungiert zu $G$, so folgt $F_1 \cong F_2$; sind $G_1$ und $G_2$ beide rechtsadjungiert zu $F$, so folgt $G_1 \cong G_2$.

*Beweis.* Etwa für $F_1$ und $F_2$: Die natürliche Äquivalenz

$$\operatorname{Mor}(F_2(A), -) \cong \operatorname{Mor}(A, G(-)) \cong \operatorname{Mor}(F_1(A), -)$$

wird nach Folgerung 1 von einem Isomorphismus $h_A\colon F_1(A) \xrightarrow{\sim} F_2(A)$ induziert. Weil die sogenannte Eins $I \xrightarrow{\varepsilon_2} GF_2$ aus Beispiel 2 natürlich ist, ist in

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash, "\varepsilon_{2,A}"] \arrow[d, dash, "\alpha"'] & GF_2(A) \arrow[d, dash, "GF_2(\alpha)"] \\
B \arrow[r, dash, "\varepsilon_{2,B}"'] & GF_2(B)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, dash, "h_A"] \arrow[d, dash] & F_2(A) \arrow[d, dash] \\
F_1(B) \arrow[r, dash, "h_B"'] & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

das linke Quadrat kommutativ, also auch das rechte. □

# III. Exaktheit

Ein Funktor $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** heißt *additiv*, wenn alle von $F$ induzierten Abbildungen $\mathrm{Hom}_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_T(F(A),F(B))$ Gruppenhomomorphismen sind, d.h. $F(\alpha_1+\alpha_2) = F(\alpha_1)+F(\alpha_2)$ für alle $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$.

**Lemma 1.** *Ein Funktor $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** ist genau dann additiv, wenn $F$ endliche Produkte erhält.*

*Beweis.* Für alle $A_1,\dots,A_n \in R$-**Mod** ist zu zeigen, dass die kanonische Abbildung

$$F(A_1\times\cdots\times A_n) \xrightarrow{\ \varphi\ } F(A_1)\times\cdots\times F(A_n),$$

induziert von den $F(\pi_i)$, ein Isomorphismus ist. Mit den entsprechenden Abbildungen $F(\varepsilon_i)\colon F(A_i) \longrightarrow F(A_1\times\cdots\times A_n)$ hat man den induzierten Morphismus

$$F(A_1)\times\cdots\times F(A_n) \xrightarrow{\ \psi\ } F(A_1\times\cdots\times A_n),$$

und dann gilt $\varphi\psi = 1$ und $\psi\varphi = 1$.

Für jeden $R$-Modul $A \in R$-**Mod** sei $\Delta_A\colon A \longrightarrow A\times A, a \longmapsto (a,a)$ die *Diagonale* und $\nabla_A\colon A\times A \longrightarrow A, (a_1,a_2) \longmapsto a_1+a_2$ die *Kodiagonale*, und für $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ ist dann

$$\alpha_1+\alpha_2 = \Big(A \xrightarrow{\ \Delta_A\ } A\times A \xrightarrow{\ \alpha_1\times\alpha_2\ } B\times B \xrightarrow{\ \nabla_B\ } B\Big),$$

und

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\Delta_A)"] \arrow[dr, "\Delta_{F(A)}"'] & F(A\times A) \arrow[rr, "F(\alpha_1\times\alpha_2)"] \arrow[d, "\wr"] & & F(B\times B) \arrow[r, "F(\nabla_A)"] \arrow[d, "\wr"] & F(B) \\
 & F(A)\times F(A) \arrow[rr, "F(\alpha_1)\times F(\alpha_2)"'] & & F(B)\times F(B) \arrow[ur, "\nabla_{F(B)}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ, woraus die Additivität von $F$ folgt. $\square$

**Folgerung.** Ist $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** linksadjungiert zu $G$, so sind $F$ und $G$ beide additiv sowie die Adjunktion $\omega\colon \mathrm{Hom}_T(F(A),Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(A,G(Y))$ ein Gruppenisomorphismus.

*Beweis.* Nach II.2 vertauschen $F$ und $G$ beide mit endlichen Produkten und nach Beispiel 2 ist $\omega(f) = G(f)\varepsilon_A$, also $\omega$ additiv. $\square$

Ein *Komplex* $\mathfrak{A}$ in $R$-**Mod** ist eine Folge

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

von $R$-Linksmoduln $A_n$ und $R$-Homomorphismen mit $\alpha_n\alpha_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Der $R$-Modul $H_n(\mathfrak{A}) = \ker(\alpha_n)/\mathrm{im}(\alpha_{n+1})$ heißt der *$n$-te Homologiemodul* von $\mathfrak{A}$. Dessen Berechnung ist der Hauptgegenstand der homologischen Algebra. Sind alle $H_n(\mathfrak{A}) = 0$, d.h. $\mathrm{im}(\alpha_{n+1}) = \ker(\alpha_n)$, so heißt $\mathfrak{A}$ *exakt*.

Ein Funktor $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** heißt *rechtsexakt*, wenn für jede exakte Folge

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

(d.h. $\mathrm{im}(\alpha) = \ker(\beta)$ und $\beta$ surjektiv) in $R$-**Mod** auch

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$$

in $T$-**Mod** exakt ist. In diesem Fall ist $F$ additiv, denn

$$A \xrightarrow{0} B \xrightarrow{1} B \longrightarrow 0$$

ist exakt, also auch

$$F(A) \xrightarrow{F(0)} F(B) \xrightarrow{1} F(B) \longrightarrow 0$$

d.h. $F(0_B^A) = 0_{F(B)}^{F(A)}$, insbesondere $F(0) = 0$. Es bleibt nach Lemma 1 zu zeigen, dass $\varphi\colon F(A_1 \times A_2) \longrightarrow F(A_1) \times F(A_2)$ ein Isomorphismus ist. Mit dem dort definierten $\psi\colon F(A_1) \times F(A_2) \longrightarrow F(A_1 \times A_2)$ gilt, dass $\varphi\psi = 1$. $\varphi$ ist auch injektiv, denn nach Voraussetzung ist auch

$$F(A_1) \xrightarrow{F(\varepsilon_1)} F(A_1 \times A_2) \xrightarrow{F(\pi_2)} F(A_2) \longrightarrow 0$$

exakt, so dass aus $\varphi(u) = 0$, $u \in F(A_1 \times A_2)$, insbesondere $F(\pi_2)(u) = 0$, also wegen der Exaktheit $u = F(\varepsilon_1)(v)$ für ein $v \in F(A_1)$ folgt. Dann ist

$$\varphi(u) = (F(\pi_1)F(\varepsilon_1)(v), F(\pi_2)F(\varepsilon_1)(v)) = (v, 0),$$

also $v = 0$ und $u = 0$.

Dual heißt ein Funktor $G\colon T$-**Mod** $\longrightarrow R$-**Mod** *linksexakt*, wenn für jede exakte Folge $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ in $T$-**Mod** auch $0 \longrightarrow G(X) \longrightarrow G(Y) \longrightarrow G(Z)$ in $R$-**Mod** exakt ist. Auch hier ist dann $G$ automatisch additiv.

**Lemma 2.** *Ist $F\colon R\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow T\text{-}\boldsymbol{Mod}$ linksadjungiert zu $G\colon T\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow R\text{-}\boldsymbol{Mod}$, so ist $F$ rechtsexakt und $G$ linksexakt.*

*Beweis.* Eine Folge

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\beta"] \\ 0 \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

eine Fasersumme ist. Nun erhält $F$ Fasersummen, d.h.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d] & F(B) \arrow[d, "F(\beta)"] \\ 0 \arrow[r] & F(C) \end{tikzcd}$$

ist auch eine Fasersumme. $\square$

**Beispiel.** Mit einem Bimodul ${}_TM_R$ ist der Funktor $M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}_T(M, -)$, sodass nach Lemma 2 folgt: Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ exakt in $R$-**Mod**, so ist auch

$$M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B \longrightarrow M \otimes_R C \longrightarrow 0$$

exakt in $T$-**Mod**. Ist $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ exakt in $T$-**Mod**, so ist auch

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_T(M, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_T(M, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_T(M, Z)$$

exakt in $R$-**Mod**.

**Bemerkung.** Sind $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ beide kontravariant, so heißt $F$ linksadjungiert zu $G$, wenn kanonisch

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(Y, F(A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, G(Y))$$

ist. In diesem Fall ist auch $G$ linksadjungiert zu $F$, und beide Funktoren verwandeln Epimorphismen (Koprodukte, Fasersummen) in Monomorphismen (Produkte, Faserprodukte). Im Falle $\mathcal{C} = R$-**Mod** und $\mathcal{D} = S$-**Mod** sind beide Funktoren additiv und linksexakt, d.h. ist

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

exakt in $R$-**Mod** folgt

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A)$$

exakt in $S$-**Mod**, ebenso mit $G$.

**Beispiel.** Ist ${}_RN_S$ ein Bimodul, so ist $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}_S(-,N)$.

**Satz 1** (Watts)**.** *Für einen kovarianten Funktor $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** sind äquivalent:*

(i) *$F$ ist linksadjungiert zu einem kovarianten Funktor $G\colon T$-**Mod** $\longrightarrow R$-**Mod**.*

(ii) *$F$ erhält Koprodukte und ist rechtsexakt.*

(iii) *$F \cong M \otimes_R -$ für einen Bimodul ${}_TM_R$.*

*Beweis.* Die Implikationen $(iii) \implies (i)$ und $(i) \implies (ii)$ sind klar. Für die Implikation $(ii) \implies (iii)$ machen wir zuerst $M = F(R)$ zu einem $T$-$R$-Bimodul und geben eine natürliche Transformation $\eta\colon M \otimes_R - \longrightarrow F$ an. Zu $x \in M$ und $r \in R$ sei $x.r = F(\widetilde{r})(x)$ mit der Rechtsmultiplikation $\widetilde{r}\colon R \longrightarrow R$, und dann ist $(tx).r = F(\widetilde{r})(tx) = tF(\widetilde{r})(x) = t(x.r)$, $x.1 = x$, $(x.r_1).r_2 = F(\widetilde{r_2})(x.r_1) = F(\widetilde{r_2})(F(\widetilde{r_1})(x)) = F(\widetilde{r_1r_2})(x) = x.(r_1r_2)$, $x.(r_1+r_2) = F(\widetilde{r_1+r_2})(x) = F(\widetilde{r_1}+\widetilde{r_2})(x) = F(\widetilde{r_1})(x) + F(\widetilde{r_2})(x) = x.r_1 + x.r_2$ und $(x_1+x_2).r = F(\widetilde{r})(x_1+x_2) = F(\widetilde{r})(x_1) + F(\widetilde{r})(x_2) = x_1.r + x_2.r$. Also ist ${}_TM_R$ ein Bimodul. Für jedes $A \in R$-**Mod** und $a \in A$ hat man $h_a\colon R \longrightarrow A, r \longmapsto ra$ und $F(h_a)\colon M \longrightarrow F(A)$, sodass $\varphi_A\colon M \times A \longrightarrow F(A), (x,a) \longmapsto F(h_a)(x)$ eine tensorielle Abbildung ist, also einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{\varphi_A}\colon M \otimes_R A \longrightarrow F(A)$ induziert, den wir $\eta_A$ nennen. Er ist sogar $T$-linear und natürlich in $A$, denn mit $\alpha\colon A \longrightarrow B$ ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "1\otimes\alpha"'] & F(A) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
M \otimes_R B \arrow[r, "\eta_B"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

zu zeigen: Es ist

$$\begin{aligned}
(F(\alpha)\eta_A)(x \otimes a) &= F(\alpha)F(h_a)(x) = F(\alpha h_a)(x) = F(h_{\alpha(a)})(x) = \eta_B(x \otimes \alpha(a)) = \\
&= (\eta_B(1 \otimes \alpha))(x \otimes \alpha),
\end{aligned}$$

d.h. $F(\alpha)\eta_A = \eta_B(1 \otimes \alpha)$.

Nun ist $\eta$ eine natürliche Äquivalenz, denn $\eta_R\colon M \otimes_R R \longrightarrow M, x \otimes r \longmapsto x.r$ ist nach (2, B1) ein Isomorphismus. Falls $A = R^{(I)}$, ist

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\wr"'] & F(A) \arrow[d, "\wr"] \\
(M \otimes_R R)^{(I)} \arrow[r, "\sim"] & M^{(I)}
\end{tikzcd}$$

kommutativ, also $\eta_A$ ebenfalls ein Isomorphismus. Ist ${}_RA$ beliebig, folgt mit

$$A_1 \xrightarrow{\alpha} A_0 \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

exakt, $A_1$ und $A_2$ frei, dass im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_1"', "\wr"] & M \otimes_R A_0 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_2"', "\wr"] & M \otimes_R A \arrow[r] \arrow[d, "\eta_A"'] & 0 \\
F(A_1) \arrow[r] & F(A_0) \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

beide Zeilen exakt sind. Damit ist auch $\eta_A$ ein Isomorphismus. $\square$

**Satz** (Watts)**.** *Für einen kovarianten Funktor $G\colon T\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow R\text{-}\boldsymbol{Mod}$ sind äquivalent:*

(i) *$G$ ist rechtsadjungiert zu einem kovarianten Funktor $F\colon R\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow T\text{-}\boldsymbol{Mod}$.*
(ii) *$G$ erhält Produkte und ist linksexakt.*
(iii) *$G \cong \mathrm{Hom}_T(M,-)$ für einen Bimodul ${}_TM_R$.*

**Satz** (Watts)**.** *Für einen kontravarianten Funktor $F\colon R\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow S\text{-}\boldsymbol{Mod}$ sind äquivalent:*

(i) *$F$ ist linksadjungiert zu einem kontravarianten Funktor $G\colon S\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow R\text{-}\boldsymbol{Mod}$.*
(ii) *$F$ verwandelt Koprodukte in Produkte und ist linksexakt.*
(iii) *$F \cong \mathrm{Hom}_R(-,N)$ für einen Bimodul ${}_RN_S$.*

Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Ein Objekt $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt *projektiv*, wenn für jeden Epimorphismus $\beta\colon B \twoheadrightarrow C$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P,C)$ surjektiv ist, d.h.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}$$

zu jedem $f\colon P \longrightarrow C$ gibt es ein $g\colon P \longrightarrow B$ mit $\beta g = f$.

**Beispiele.**

(i) In $\mathcal{C} = \mathbf{Men}$ ist jedes Objekt projektiv, denn zu jedem $\beta\colon B \twoheadrightarrow C$ gibt es stets ein $\sigma\colon C \longrightarrow B$ mit $\beta\sigma = 1_C$. Dann leistet $g = \sigma f$ das Gewünschte.

(ii) Ist $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ und erhält $G$ Epimorphismen, so erhält $F$ projektive Objekte, denn sei $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ projektiv und

$$\begin{tikzcd} & F(P) \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dann folgt

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ G(X) \arrow[r, "G(h)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

mit $\overline{f} = G(h)g$, also $f = h\omega^{-1}(g)$.
Weil der freie Funktor $\mathbf{Men} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ linksadjungiert zum Vergissfunktor ist, folgt, dass jeder freie $R$-Modul projektiv ist.

(iii) Ist $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ projektiv und $\pi\colon P \twoheadrightarrow P'$ ein Epimorphismus, so ist $P'$ projektiv, genau dann wenn $\pi$ zerfällt.

(iv) Ist $(P_i)_{i \in I}$ eine Familie von projektiven Objekten in $\mathcal{C}$, so ist auch $\coprod_{i \in I} P_i$ projektiv.

**Satz 2.** *Für einen $R$-Modul $M$ sind äquivalent:*

(i) *$M$ ist projektiv.*

(ii) *$M$ ist bis auf Isomorphie direkter Summand eines freien $R$-Moduls.*

(iii) *Jeder Epimorphismus $\beta\colon B \twoheadrightarrow M$ zerfällt.*

(iv) *Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -)\colon R\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ist exakt.*

(v) *Es gibt eine Familie von Elementen $x_i \in M$ und $R$-Homomorphismen $\varphi_i\colon M \longrightarrow R$, sodass für jedes $x \in M$ gilt*

- *$\varphi_i(x) = 0$ für fast alle $i \in I$.*
- *$x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) x_i$.*

*Beweis.* Für die Implikation $(i) \implies (iii)$ betrachte man

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & M \end{tikzcd}$$

Für die Implikation $(iii) \implies (ii)$ zerfällt $\beta\colon R^{(M)} \twoheadrightarrow M$ nach Voraussetzung, d.h. es gibt ein $\sigma\colon M \longrightarrow R^{(M)}$ mit $\beta\sigma = 1_M$. Aus $R^{(M)} = \mathrm{im}(\sigma) \oplus \ker(\beta)$ und $\mathrm{im}(\sigma) \cong M$ folgt $(ii)$.

Für die Implikation $(ii) \implies (i)$ sei $M \cong M' \subset^{\oplus} R^{(I)}$. Nach Beispiel 2 ist $R^{(I)}$ projektiv, also nach Beispiel 3 auch $M$.

Für die Implikation $(i) \implies (iv)$ sei

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

exakt in $R$-**Mod**. Dann ist auch

$$\mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(M, C)$$

exakt, denn ist $f \in \mathrm{Hom}(M, B)$ und $\beta_*(f) = 0$, d.h. $\beta f = 0$, d.h. $\mathrm{im}(f) \subset \ker(\beta) = \mathrm{im}(\alpha)$, so existiert ein $g$, sodass

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, "\alpha'"'] & \mathrm{im}(\alpha) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann ist $f = \alpha g = \alpha_*(g)$.

Für $(iv) \implies (i)$ folgt aus der Exakheit von

$$B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$\mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(M, C) \longrightarrow 0$$

d.h. $M$ ist projektiv.

Für $(iii) \implies (v)$ sei $M = \sum_{i \in I} Rx_i$. Es zerfällt $\beta \colon R^{(I)} \twoheadrightarrow M, e_j \longmapsto x_j$ und mit $\beta\sigma = 1_M$ und $\pi_j \colon R^{(I)} \twoheadrightarrow R$ leisten die $\varphi_i = \pi_i \sigma$ das Gewünschte: Ist $x \in M$, so ist $\sigma(x) \in R^{(I)}$, also fast alle $\varphi_i(x) = 0$ und mit $\sigma(x) = \sum_{i \in I} r_i e_i$ folgt

$$x = \beta\sigma(x) = \sum_{i \in I} r_i \beta(e_i) = \sum_{i \in I} \pi_i \sigma(x) x_i = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) x_i.$$

Für $(v) \implies (iii)$ betrachte

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & M \end{tikzcd}$$

Mit $x_i = \beta(b_i)$ ist $g(x) := \sum_{i \in I} \varphi_i(x) b_i \in B$ und $g$ $R$-linear und $\beta g = 1_M$. $\square$

Ein $R$-Modul $M$ heißt *flach*, wenn für jeden Monomorphismus $\alpha\colon A \hookrightarrow B$ in $R$-**Mod** auch $M \otimes_R A \hookrightarrow M \otimes_R B$ ein Monomorphismus ist. Dann ist sogar der Funktor $M \otimes_R -$ exakt, d.h. aus

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

exakt in $R$-**Mod** folgt

$$M \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes \alpha} M \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes \beta} M \otimes_R C$$

exakt in **Ab**.

*Beweis.* Nach (3,L2) folgt aus der Exaktheit von

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta'} \operatorname{im}(\beta) \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$M \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes \alpha} M \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes \beta'} M \otimes_R \operatorname{im}(\beta) \longrightarrow 0$$

Außerdem ist

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r] & M \otimes_R B \arrow[r] \arrow[dr] & & M \otimes_R C \\
& & M \otimes_R \operatorname{im}(\beta) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativ, also folgt die Exaktheit von $M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B \longrightarrow M \otimes_R C$. $\square$

Nicht jeder $R$-Modul $M$ ist flach: über $R = \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ein Monomorphismus, aber $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ für $n \geq 2$ nicht.

**Folgerung.** Jeder projektive $R$-Modul ist flach.

*Beweis.* $R_R$ ist flach nach (2,B1), also auch jeder freie $R$-Modul, also auch jeder direkte Summand, denn zerfällt $M \hookrightarrow R^{(I)}$ und ist $\alpha\colon A \hookrightarrow B$ ein Monomorphismus, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d] & M \otimes_R B \arrow[d] \\
R^{(I)} \otimes_R A \arrow[r, "1\otimes\alpha"'] & R^{(I)} \otimes_R B
\end{tikzcd}$$

und auch $1 \otimes \alpha\colon M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B$ ist ein Monomorphismus. $\square$

In einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein Objekt $Q$ *injektiv*, wenn für jeden Monomorphismus $\alpha\colon A \hookrightarrow B$ die induzierte Abbildung $\alpha^*\colon \operatorname{Mor}(B,Q) \longrightarrow \operatorname{Mor}(A,Q)$ surjektiv ist, d.h.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

**Beispiele.**

(i) In $\mathcal{C} = \mathbf{Men}$ ist jedes Objekt bis auf $\emptyset$ injektiv. Sei $Q \neq \emptyset$ und betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "f\rho"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Für $A = \emptyset$ ist die Behauptung klar und für $A \neq \emptyset$ gibt es ein $\rho\colon B \longrightarrow A$ mit $\rho\alpha = 1_A$ und dann leistet $g = f\rho$ das Gewünschte.

(ii) Ist $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ rechtsadjungiert zu $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und erhält $F$ Monomorphismen, so erhält $G$ injektive Objekte. Ist speziell ${}_TM_R$ ein Bimodul und $M_R$ flach, ${}_TQ$ injektiv, so ist auch $\operatorname{Hom}_T(M,Q)$ als $R$-Linksmodul injektiv, denn $\operatorname{Hom}_T(M,-)$ ist rechtsadjungiert zu $F = M \otimes_R -$ und $F$ erhält Monomorphismen.

(iii) Ist $Q \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ injektiv und $\varepsilon\colon Q' \hookrightarrow Q$ ein Monomorphismus, so ist $Q'$ genau dann injektiv, wenn $\varepsilon$ zerfällt.

(iv) Ist $(Q_i)_{i\in I}$ eine Familie von injektiven Objekten in $\mathcal{C}$, so ist auch $\prod_{i\in I} Q_i$ injektiv.

**Satz 3.** *Für eine $R$-Modul $M$ sind äquivalent:*

(i) *$M$ ist injektiv.*

(ii) *Jeder Monomorphismus $M \hookrightarrow B$ zerfällt.*

(iii) *Der kontravariante Funktor* $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ *ist exakt.*

(iv) *Für jedes Linksideal $I \subset R$ und jeden Homomorphismus $f\colon I \longrightarrow M$ existiert ein $g\colon R \longrightarrow M$ mit*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

*Beweis.*

*(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* Ist eine Sequenz

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

exakt, so ist auch

$$\mathrm{Hom}(C,M) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(B,M) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(A,M)$$

exakt, denn für $f \in \mathrm{Hom}(B,M)$ mit $\alpha^*(f) = 0$, d.h. $f\alpha = 0$, $\mathrm{im}(\alpha) \subset \ker(f)$, ist

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & B/\mathrm{im}(\alpha) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, dashed, "f'"] & C \arrow[dl, dashed, "g"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

kommutativ für ein geeignetes $g\colon C \longrightarrow M$ und $f = g\beta = \beta^*(g)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Die Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B$$

ist exakt, also auch die Sequenz

$$\mathrm{Hom}(B,M) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(M,M) \longrightarrow 0,$$

d.h. es existiert ein $\rho\colon B \longrightarrow M$ mit $1_M = \alpha^*(\rho) = \rho\alpha$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Zu

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\rho f'"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

bilde man die Fasersumme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, dashed, "f'"] \\
M \arrow[r, dashed, "\alpha'"'] & C
\end{tikzcd}$$

Dann ist auch $\alpha'$ ein Monomorphismus, also existiert ein $\rho\colon C \longrightarrow M$ mit $\rho\alpha' = 1_M$, also $\rho f'\alpha = f$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sei gleich $A \subset B$ und $f\colon A \longrightarrow M$. Dann ist die Menge

$$\{(U,g)\colon A \subset U \subset B \text{ und } g \in \mathrm{Hom}(U,M), g|_H = f\}$$

induktiv geordnet durch $(U_1, g_1) \leq (U_2, g_2)$, wenn $U_1 \subset U_2$ und $g_2|_{U_1} = g_1$, hat also nach Zorn ein maximales Element $(U_0, g_0)$. Dann ist $U_0 = B$, denn zu $b \in B$ sei $I = \{r \in R \colon rb \in U_0\}$ und $I \longrightarrow M, r \longmapsto g_0(rb)$. Nach Voraussetzung hat man

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & R \arrow[dl, dashed, dash, "h_x"] \\ M & \end{tikzcd}$$

d.h. es gibt ein $x \in M$ mit $g_0(rb) = rx$ für alle $r \in I$, sodass die Abbildung $U_0 + Rb \longrightarrow M, u + sb \longmapsto g_0(u) + sx$ wohldefiniert ist, denn ist $u + sb = U' + s'b$, so gilt $(s - s')b = u' - u \in U_0$, also $s - s' \in I$ und damit $g_0(u' - u) = g_0((s - s')b) = (s - s')x$, also $g_0(u') + s'x = g_0(u) + sx$. Sie ist $R$-linear und eine Fortsetzung von $g_0$, also gilt $U_0 = U_0 + Rb$, d.h. $b \in U_0$. □

**Folgerung 1.** Ist $R$ ein Integritätsring und ${}_RM$ teilbar und torsionsfrei, so ist ${}_RM$ injektiv. Speziell ist der Quotientenkörper $K$ von $R$ als $R$-Modul injektiv.

*Beweis.* Ein $R$-Modul $N$ heißt *teilbar* (*torsionsfrei*), wenn für jedes $r \neq 0$ die Multiplikation $\hat{r} \colon M \longrightarrow M$ surjektiv (injektiv) ist. Jeder injektive $R$-Modul $M$ ist teilbar, denn sind $x \in M$ und $0 \neq r \in R$, so existiert ein $g \colon R \longrightarrow M$ mit

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dash, "\hat{r}"] \arrow[d, dash, "h_x"'] & R \arrow[dl, dashed, dash, "g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

d.h. $x = g(\hat{r}(1)) = g(r) = rg(1)$. Sei jetzt $M$ teilbar und torsionsfrei, $0 \neq I \subset R$ ein Ideal, $f \colon I \longrightarrow M$ $R$-linear, $0 \neq a_0 \in I$ und $f(a_0) = a_0 y$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, dash, "\hat{y}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Dann ist $\hat{y} \colon R \longrightarrow M$ eine Fortsetzung von $f$, denn für $r \in I$ ist $a_0 ry = f(ra_0) = a_0 f(r)$, also $ry = f(r)$, da $M$ torsionsfrei ist, also $f = \hat{y}|_I$. □

**Folgerung 2.** Über einem Hauptidealring $R$ stimmen die injektiven $R$-Moduln mit den teilbaren überein. Speziell ist für den Quotientenkörper $K$ von $R$ auch der Faktormodul $K/R$ injektiv.

*Beweis.* Ist $M$ teilbar und $0 \neq I = (a_0) \subset R$ ein Ideal, $f\colon I \longrightarrow M$ $R$-linear und $f(a_0) = a_0 y$, so ist $\hat{y}$ eine Fortsetzung von $f$, denn $\hat{y}(ra_0) = ra_0 y = rf(a_0) = f(ra_0)$. $\square$

**Folgerung 3.** Jeder $R$-Modul lässt sich in einen injektiven $R$-Modul einbetten.

*Beweis.* Ist zuerst $M$ ein $\mathbb{Z}$-Modul und $\beta\colon \mathbb{Z}^{(I)} \twoheadrightarrow M$, so existiert ein Monomorphismus $M \cong \mathbb{Z}^{(I)}/\ker(\beta) \hookrightarrow \mathbb{Q}^{(I)}/\ker(\beta)$ und $\mathbb{Q}^{(I)}/\ker(\beta)$ ist injektiv nach Folgerung 2. Ist $M$ ein $R$-Modul für einen beliebigen Ring $R$, so gibt es nach eben einen $\mathbb{Z}$-Monomorphismus $i\colon M \hookrightarrow Q$ mit $\mathbb{Z}$-injektivem $Q$, der einen $R$-Monomorphismus $M \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q), x \longmapsto ih_x$ induziert, bei dem $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ nach Beispiel 2 als $R$-Linksmodul injektiv ist. $\square$

# IV. Homologie

Ein *Komplexhomomorphismus* $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ ist eine Folge $f = (\dots, f_n, f_{n-1}, \dots)$ von $R$-Homomorphismen $f_n$ mit $f_n\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dash] & A_{n+1} \arrow[r, dash, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, dash, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r, dash, "\alpha_n"] \arrow[d, dash, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dash] & B_{n+1} \arrow[r, dash, "\beta_{n+1}"] & B_n \arrow[r, dash, "\beta_n"] & B_{n-1} \arrow[r, dash] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ist $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ ein Komplexhomomorphismus, so auch $gf = (\dots, g_nf_n, \dots)\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$, also ist $R$-**Kom** eine Kategorie mit $1_{\mathfrak{A}} = (\dots, 1_{A_n}, \dots)$ und $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ ist genau dann ein Monomorphismus (Epimorphismus, Isomorphismus), wenn es alle $f_n$ in $R$-**Mod** sind. Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in R$-**Kom** ist $\mathrm{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ eine abelsche Gruppe mit der Addition $f + g = (\dots, f_n + g_n, \dots)$. Zur Definition von $H_n(f)\colon H_n(\mathfrak{A}) \longrightarrow H_n(\mathfrak{B})$ schreiben wir $Z_n(\mathfrak{A}) = \ker(\alpha_n)$ (die *$n$-Zyklen* von $\mathfrak{A}$) und $B_n(\mathfrak{A}) = \mathrm{im}(\alpha_{n+1})$ (die *$n$-Ränder* von $\mathfrak{A}$) und ist dann $x \in Z_n(\mathfrak{A})$, so ist $\beta_nf_n(x) = f_{n-1}\alpha_n(x) = 0$, also $f_n(x) \in Z_n(\mathfrak{B})$. Man erhält also einen eindeutigen $R$-Homomorphismus $f'_n\colon Z_n(\mathfrak{A}) \longrightarrow Z_n(\mathfrak{B})$, sodass

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, dash, "f_n"] \arrow[d, dash] & B_n \arrow[d, dash] \\
Z_n(\mathfrak{A}) \arrow[r, dashed, dash, "f'_n"'] & Z_n(\mathfrak{B})
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $x \in B_n(\mathfrak{A})$, etwa $x = \alpha_{n+1}(y)$, so ist $f'_n(x) = \beta_{n+1}f_{n+1}(x) \in B_n(\mathfrak{B})$, man erhält also einen eindeutigen $R$-Homomorphismus $H_n(f)\colon H_n(\mathfrak{A}) \longrightarrow H_n(\mathfrak{B})$, sodass

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, dash, "f_n"] \arrow[d, dash] & B_n \arrow[d, dash] \\
Z_n(\mathfrak{A}) \arrow[r, dashed, dash, "f'_n"] \arrow[d, dash] & Z_n(\mathfrak{B}) \arrow[d, dash] \\
B_n(\mathfrak{A}) \arrow[r, dashed, dash, "H_n(f)"] & B_n(\mathfrak{B})
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist damit $H_n\colon R$-**Kom** $\longrightarrow R$-**Mod** ein additiver kovarianter Funktor, der sogenannte *$n$-te Homologiefunktor*. Ist $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** ein kovarianter exakter Funktor, so gilt $FH_n(\mathfrak{A}) \cong H_nF(\mathfrak{A})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

*Beweis.* Mit $\mathfrak{A} = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow A_n \longrightarrow \cdots$ ist auch $F(\mathfrak{A}) = \cdots \longrightarrow F(A_{n+1}) \longrightarrow F(A_n) \longrightarrow \cdots$ ein Komplex. Zu jedem Untermodul $U \subset A_n$ fassen wir $F(U) \subset F(A_n)$ als Untermodul auf, und dann ist $\ker F(\alpha_n) \cong F(\ker \alpha_n)$, denn betrachte die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dash] & \ker \alpha_n \arrow[r, dash] & A_n \arrow[r, dash, "\alpha_n"] & A_{n-1} \end{tikzcd}$$

und $\operatorname{im} F(\alpha_{n+1}) \cong F(\operatorname{im} \alpha_{n+1})$, denn betrachte dass kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_{n+1} \arrow[rr, dash, "\alpha_{n+1}"] \arrow[dr, dash] & & A_n \\ & \operatorname{im} \alpha_{n+1} \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Also ist $H_n F(\mathfrak{A}) \cong F(\ker \alpha_n)/F(\operatorname{im} \alpha_{n+1}) \cong F H_n(\mathfrak{A})$. $\square$

Sind $f, g\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ Komplexhomomorphismen, so heißt $f$ *homotop* zu $g$, in Zeichen $f \simeq g$, wenn es eine Folge von $R$-Homomorphismen $s_n\colon A_n \longrightarrow B_{n+1}$ gibt mit $f_n - g_n = \beta_{n+1} s_n + s_{n-1} \alpha_n$.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dash] & A_{n+1} \arrow[r, dash, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, dash, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, dash, "\alpha_n"] \arrow[d, dash, "f_n-g_n"] \arrow[dl, dash, "s_n"] & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, dash, "s_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, dash] & B_{n+1} \arrow[r, dash, "\beta_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, dash, "\beta_n"'] & B_{n-1} \arrow[r, dash] & \cdots \end{tikzcd}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, denn Reflexivität und Symmetrie sind klar und $f \simeq g$ mit $(s_n)$ und $g \simeq h$ mit $(t_n)$ impliziert $f \simeq h$ mit $(s_n + t_n)$.

Aus $f \simeq g$ folgt $H_n(f) = H_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, denn ist $x \in Z_n(\mathfrak{A})$, so ist $(f_n - g_n)(x) = (\beta_{n+1} s_n + s_{n-1} \alpha_n)(x) = \beta_{n+1} s_n(x) \in B_n(\mathfrak{B})$, also $H_n(f - g) = 0$.

**Bemerkungen.**

(i) Aus $H_n(f) = H_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ folgt im Allgemeinen nicht $f \simeq g$, denn ist

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash, "\alpha"] \arrow[d, dash, "f_1"'] & B \\ M & \end{tikzcd}$$

in $R$-**Mod** gegeben, so definiert man $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ durch

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, no head] & 0 \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "0"] & A \arrow[r, no head, "\alpha"] \arrow[d, no head, "f_1"] & B \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "0"] & 0 \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, no head] & 0 \arrow[r, no head] & M \arrow[r, no head] & 0 \arrow[r, no head] & 0 \arrow[r, no head] & \cdots
\end{tikzcd}$$

und es folgt $H_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber $f \simeq 0$ genau dann, wenn $f_1$ sich über $\alpha$ faktorisieren lässt.

(ii) Ein Komplex $\mathfrak{A}$ heißt *zusammenziehbar*, wenn $1_\mathfrak{A} \simeq 0$.Dann stimmen 1 und 0 als Homomorphismen $H_n(\mathfrak{A}) \longrightarrow H_n(\mathfrak{A})$ überein, das heißt $H_n(\mathfrak{A}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $\mathfrak{A}$ ist exakt. Genau dann ist ein Komplex $\mathfrak{A}$ zusammenziehbar, wenn $\operatorname{im}\alpha_{n+1} = \ker\alpha_n \subset^\oplus A_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Ein Komplexhomomorphismus $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es ein $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ gibt mit $gf \simeq 1_\mathfrak{A}$ und $fg \simeq 1_\mathfrak{B}$. Dann folgt $H_n(g)H_n(f) = 1_{H_n(\mathfrak{A})}$ und $H_n(f)H_n(g) = 1_{H_n(\mathfrak{B})}$, d.h. $H_n(f)$ ist ein Isomorphismus $H_n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathfrak{B})$.

**Lemma.**

(i) *Wenn* $f_1 \simeq f_2$ *und* $f_2 \simeq g_2$ *in* $\operatorname{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$*, dann* $f_1 + f_2 \simeq g_1 + g_2$*.*

(ii) *Aus* $f \simeq g$ *in* $\operatorname{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *und* $u \simeq v$ *in* $\operatorname{Mor}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ *folgt* $uf \simeq vg$ *in* $\operatorname{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$*.*

(iii) *Ist* $F\colon R$-***Mod*** $\longrightarrow T$-***Mod*** *additiv und kovariant und* $f \simeq g$ *in* $\operatorname{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$*, so folgt* $F(f) \simeq F(g)$ *in* $\operatorname{Mor}(F\mathfrak{A}, F\mathfrak{B})$*.*

*Beweis.*

(i) Hat man $f_{1n} - g_{1n} = \beta_{n+1}s_n + s_{n-1}\alpha_n$ und $f_{2n} - g_{2n} = \beta_{n+1}r_n + r_{n-1}\alpha_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $(f_1 + f_2)_n - (g_1 + g_2)_n = \beta_{n+1}(s_n + r_n) + (s_{n+1} + r_{n+1})\alpha_n$, d.h. $t_n = s_n + r_n\colon A_n \longrightarrow B_{n+1}$ leistet das Gewünschte.

(ii) Hat man $f_n - g_n = \beta_{n+1}s_n + s_{n-1}\alpha_n$ und $u_n - v_n = \gamma_{n+1}r_n + r_{n-1}\beta_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned}
(uf)_n - (vg)_n &= u_n(f_n - g_n) + (u_n - v_n)g_n = \\
&= u_n\beta_{n+1}s_n + u_ns_{n-1}\alpha_n + \gamma_{n+1}r_ng_n + r_{n-1}\beta_ng_n = \\
&= \gamma_{n+1}u_{n+1}s_n + u_ns_{n-1}\alpha_n + \gamma_{n+1}r_ng_n + r_{n-1}g_{n-1}\alpha_n = \\
&= \gamma_{n+1}(u_{n+1}s_n + r_ng_n) + (u_ns_{n-1} + r_{n-1}g_{n-1})\alpha_n,
\end{aligned}$$

d.h. $t_n = u_{n+1}s_n + r_ng_n\colon A_n \longrightarrow C_{n+1}$ leistet das Gewünschte.

(iii) Aus $(s_n)\colon f \simeq g$ folgt $F(s_n)\colon F(f) \simeq F(g)$. □

**Satz** (von der langen exakten Homologiefolge)**.** *Ist eine Folge*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

*exakt in R-**Kom**, d.h. für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Folge $0 \longrightarrow A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$ exakt in R-**Mod**, so gibt es Homomorphismen $\delta_n \colon H_n(\mathfrak{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathfrak{A})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, derart dass die Folge*

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \cdots$$

*exakt ist.*

*Beweis.* Zuerst zur Exaktheit an $H_n(\mathfrak{B})$. Klar ist $H_n(g)H_n(f) = 0$, und aus $H_n(g)(\overline{b}) = 0$, $b \in Z_n(\mathfrak{B})$, folgt $g_n(b) \in \operatorname{im}(\gamma_{n+1})$, d.h. $g_n(b) = \gamma_{n+1}(c)$. Wegen $g_{n+1}$ surjektiv, ist $c = g_{n+1}(b')$, also $b - \beta_{n+1}(n') \in \ker(g_n)$, denn $g_n(b - \beta_{n+1}(b')) = \gamma_{n+1}(c) - g_n\beta_{n+1}(b') = \gamma_{n+1}(c) - \gamma_{n+1}g_{n+1}(b') = 0$. Wegen $\ker(g_n) = \operatorname{im}(f_n)$ ist $b - \beta_{n+1}(b') = f_n(a) \in Z_n(\mathfrak{B})$, $a \in Z_n(\mathfrak{A})$, also $\overline{b} = \overline{f_n(a)} = H_n(f)(\overline{a})$.

Nun zur Konstruktion von $\delta_n$. Nur für den Beweis sagen wir, ein Tripel $(c, b, a)$ sei ausgezeichnet, wenn $c \in Z_n(\mathfrak{C})$, $b \in B_n$ und $a \in Z_{n+1}(\mathfrak{A})$ und gilt, dass $c = g_n(b)$ und $\beta_n(b) = f_{n-1}(a)$:

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[dd, "\alpha_n"'] & B_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dd, "\beta_n"'] & & C_n \arrow[dd, "\gamma_n"] \\
 & & b \arrow[r, dashed, dash] \arrow[dd, dashed, dash] & c \\
A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & B_{n-1} \arrow[rr, "g_{n-1}"] & & C_{n-1} \\
a \arrow[rr, dashed, dash] & & {} &
\end{tikzcd}$$

Nun existiert zu jedem $c \in Z_n(\mathfrak{C})$ ein ausgezeichnetes Tripel $(c, b, a)$, denn schreibe $c = g_n(b)$. Dann ist $\beta_n(b) = f_{n+1}(a)$ wegen $\ker(g_{n-1}) = \operatorname{im}(f_{n+1})$, also $f_{n-2}\alpha_{n-1}(a) = \beta_{n-1}f_{n-1}(a) = 0$, d.h. $a \in Z_{n-1}(\mathfrak{A})$.

Sind $(c, b, a)$ und $(c', b', a')$ ausgezeichnete Tripel und $\overline{c} = \overline{c'} \in H_n(\mathfrak{C})$, so hat man $\overline{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(\mathfrak{A})$. Denn sei $c - c' = \gamma_{n+1}(z)$, $z = g_{n+1}(y)$. Damit ist $b - b' - \beta_{n+1}(y) \in \ker(g_n) = \operatorname{im}(f_n)$, denn $g_n(b - b') - g_n\beta_{n+1}(y) = c - c' - \gamma_{n+1}g_{n+1}(y) = 0$. Also ist $b - b' - \beta_{n+1}(y) = f_n(x)$ und damit $f_{n-1}(a - a' - \alpha_n(x)) = \beta_n(b) - \beta_b(b') - \beta_n f_n(x) = \beta_n(b - b') - \beta_n(b - b') + \beta_n\beta_{n+1}(y) = 0$, also ist $a - a' \in \operatorname{im}(\alpha_n) = B_n(\mathfrak{A})$, d.h. es gilt $\overline{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(\mathfrak{A})$. Also ist die Abbildung $\delta_n(\overline{c}) := \overline{a}$ (mit $c \in Z_n(\mathfrak{C})$ und $(c, b, a)$ ausgezeichnet) wohldefiniert und ein $R$-Homomorphismus.

Zur Exaktheit bei $H_n(\mathfrak{C})$ ist klar, dass $\delta_n H_n(g) = 0$, d.h. $\delta_n(\overline{g_n(b)}) = 0$ für alle $b \in Z_n(\mathfrak{B})$, denn dann ist $(g_n(b), b, 0)$ ein ausgezeichnetes Tripel. Umgekehrt folgt aus $\delta_n(\overline{c}) = 0$ und einem ausgezeichneten Tripel $(c, b, a)$, dass $\overline{a} = 0$, d.h. $a = \alpha_n(x)$. Dann ist $y = b - f_n(x) \in Z_n(\mathfrak{B})$ und $H_n(g)(\overline{y}) = \overline{g_n(b)} = \overline{c}$.

Zur Exaktheit bei $H_n(\mathfrak{A})$ ist $H_{n-1}(f)\delta_n = 0$, denn $H_{n-1}(f)\delta_n(\overline{c}) = H_{n-1}(f)(\overline{a}) = \overline{f_{n-1}(a)} = \overline{\beta_n(b)} = 0$ mit $(c, b, a)$ ausgezeichnet. Umgekehrt folgt aus $H_{n-1}(f)(\overline{a}) = 0$, dass $f_{n-1}(a) = \beta_n(b)$, also ist $c = g_n(b) \in Z_n(\mathfrak{C})$ und $(c, b, a)$ ein ausgezeichnetes Tripel. Damit folgt $\delta_n(\overline{c}) = \overline{a}$. □

**Zusatz** (Natürlichkeit des verbindenden Homomorphismus $\delta_n$)**.** Ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \mathfrak{C} \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A}' \arrow[r] & \mathfrak{B}' \arrow[r] & \mathfrak{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativ mit exakten Zeilen, so auch

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "H_{n+1}(w)"'] & H_n(\mathfrak{A}) \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, "H_n(u)"'] & H_n(\mathfrak{B}) \arrow[r, "H_n(g)"] \arrow[d, "H_n(v)"'] & H_n(\mathfrak{C}) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(w)"'] & H_{n-1}(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(u)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathfrak{C}') \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & H_n(\mathfrak{A}') \arrow[r, "H_n(f)"'] & H_n(\mathfrak{B}') \arrow[r, "H_n(g)"'] & H_n(\mathfrak{C}') \arrow[r, "\delta_n"'] & H_{n-1}(\mathfrak{A}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Ist $(c, b, a)$ ein ausgezeichnetes Tripel bzgl. $\delta_n$, so folgt mit $c' = w_n(c) \in Z_n(\mathfrak{C})$, $b' = v_n(b) \in B'_n$ und $a' = u_{n-1}(a) \in Z_{n-1}(\mathfrak{A}')$, dass $(c', b', a')$ ein ausgezeichnetes Tripel bezüglich $\delta'_n$ ist, denn $g'_n(b') = w_n g_n(b) = w_n(c) = w_n(c')$ und $\beta'_n(b') = \beta'_n v_n(b) = v_{n-1}\beta_n(b) = v_{n-1}f_{n-1}(a) = f'_{n-1}u_{n-1}(a) = f'_{n-1}(a')$. Damit ist

$$H_{n-1}(a)\delta_n(\overline{c}) = H_{n-1}(u)(\overline{a}) = \overline{u_{n-1}(a)} = \overline{a'} = \delta'_n(\overline{c'}) = \delta'_n(\overline{w_n(c)}) = \delta'_n H_n(w)(\overline{c}). \qquad \square$$

**Folgerung 1** (Schlangenlemma)**.** Ist ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' &
\end{tikzcd}$$

kommutativ mit exakten Zeilen, so gibt es eine exakte Folge

$$\ker(\alpha) \longrightarrow \ker(\beta) \longrightarrow \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \longrightarrow \operatorname{coker}(\beta) \longrightarrow \operatorname{coker}(\gamma).$$

*Beweis.* Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A/\ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{\alpha}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\gamma}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r] & \operatorname{im}(g') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sind beide Zeilen exakt und die drei senkrechten Pfeile sind teil einer exakten Folge $0 \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0$ von Komplexen. Die zugehörige lange exakte Homologiefolge liefert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dash] & \ker(\overline{\alpha}) \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & \ker(\beta) \arrow[r, dash] \arrow[ddl, dash] & \ker(\overline{\gamma}) \arrow[r, dash, "\delta"] \arrow[d, equal] & \operatorname{coker}(\overline{\alpha}) \arrow[r, dash] \arrow[d, equal] & \operatorname{coker}(\beta) \arrow[r, dash] \arrow[ddr, dash] & \operatorname{coker}(\overline{\gamma} \arrow[dd, dash] & 0 \\
 & & & \ker(\gamma) & \operatorname{coker}(\alpha) & & & \\
 & \ker(\alpha) & & & & & \operatorname{coker}(\gamma) &
\end{tikzcd}$$

und hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Zu jedem Komplexhomomorphismus $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ definiert man den sogenannten *Abbildungskegel* durch $C_n = A_{n-1} \times B_n$ und $\gamma_n(a,b) = (-\alpha_{n-1}(a), \beta_n(b) + f_{n-1}(a))$. Damit wird $\mathfrak{C}(f)$ ein Komplex, denn

$$\begin{aligned}
\gamma_{n-1}\gamma_n(a,b) &= \gamma_{n-1}(-\alpha_{n-1}(a), \beta_n(b) + f_{n-1}(a)) = \\
&= (\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}(a), \beta_{n-1}(\beta_n(b) + f_{n-1}(a)) - f_{n-2}\alpha_{n-1}(a)) = 0.
\end{aligned}$$

**Folgerung 2.** Jeder Komplexhomomorphismus $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ induziert eine lange exakte Folge

$$\cdots \;\text{---}\; H_{n+1}(\mathfrak{C}(f)) \;\text{---}\; H_n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathfrak{B}) \;\text{---}\; H_n(\mathfrak{C}(f)) \;\text{---}\; H_{n-1}(\mathfrak{A}) \;\text{---}\; \cdots$$

*Beweis.* Mit $i\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}(f)$ definiert durch $i_n(b) = (0,b)$ und $p\colon \mathfrak{C}(f) \longrightarrow \mathfrak{A}^+$, definiert durch $A_n^+ = A_{n-1}$, $\alpha_n^+ = -\alpha_{n-1}$ und $p_n(a,b) = a$, ist $0 \longrightarrow \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}(f) \longrightarrow \mathfrak{A}^+ \longrightarrow 0$ exakt und liefert die lange exakte Homologiefolge

$$\cdots \;\text{---}\; H_n(\mathfrak{C}(f)) \;\text{---}\; H_n(\mathfrak{A}^+) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathfrak{B}) \;\text{---}\; H_{n-1}(\mathfrak{C}(f)) \;\text{---}\; \cdots$$

Wegen $H_n(\mathfrak{A}^+) = H_{n-1}(\mathfrak{A})$ bleibt also zu zeigen, dass $\delta_n = H_{n-1}(f)$. Mit einem ausgezeichneten Tripel $(z,y,x)$ bezüglich $\delta_n$, d.h. $z \in Z_n(\mathfrak{A}^+) = Z_{n-1}(\mathfrak{A})$, $y \in C_n$ mit $p_n(y) = z$ und $x \in Z_{n-1}(\mathfrak{B})$ mit $i_{n-1}(x) = \gamma_n(y)$, folgt $y = (z,b)$ und $(0,x) = \gamma_n(z,b) = (-\alpha_{n-1}(z), \beta_n(b) + f_{n-1}(z))$, sodass $\overline{x} = \overline{f_{n-1}(z)}$ in $H_{n-1}(\mathfrak{B})$ ist, also $\delta_n(\overline{z}) = \overline{x} = H_{n-1}(f)(\overline{z})$. $\square$

**Folgerung 3.** Alle $H_n(f)\colon H_n(\mathfrak{A}) \longrightarrow H_n(\mathfrak{B})$ sind Isomorphismen genau dann, wenn $\mathfrak{C}(f)$ exakt ist. Der Komplexhomomorphismus $f$ ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $\mathfrak{C}(f)$ zusammenziehbar ist.

Ein *Kokomplex* in $R$-**Mod** ist eine Folge $\mathfrak{A} = \cdots \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow A^n \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow \cdots$ von $R$-Moduln und $R$-Homomorphismen $\alpha^n \colon A^{n-1} \longrightarrow A^n$ mit $\alpha^{n+1}\alpha^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, und entsprechend definiert man die *$n$-Kozyklen* $Z^n(\mathfrak{A}) = \ker \alpha^{n+1}$, die *$n$-Koränder* $B^n(\mathfrak{A}) = \operatorname{im} \alpha^n$, sowie den *$n$-ten Kohomologiemodul* $H^n(\mathfrak{A}) = Z^n(\mathfrak{A})/B^n(\mathfrak{A})$. Jede kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

von Kokomplexen induziert eine lange exakte Kohomologiefolge

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\delta^n} H^n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\delta^{n+1}} H^{n+1}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \cdots$$

in der die $\delta^n$ wieder natürlich sind.

# V. Auflösungen

Eine *projektive Auflösung* eines $R$-Moduls $M$ ist eine exakte Folge

$$\mathfrak{A} = \ \cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

in $R$-**Mod** in der alle $A_i$, $i \geq 0$, projektiv sind. Ist $M \neq 0$, so heißt $\sup\{i \in \mathbb{N} \colon A_i \neq 0\}$ die *Länge* $\operatorname{len}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$.

**Beispiele.** Ist $M$ projektiv und $M \neq 0$, so ist

$$\mathfrak{A} = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von $M$ der Länge 0.

Ist $R$ ein Integritätsring, $r \in R$ weder 0 noch Einheit und $M = R/(r)$, so ist

$$\mathfrak{A} = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\hat{r}} R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von $M$ der Länge 1.

**Lemma 1.** *Jeder $R$-Modul $M$ besitzt eine projektive Auflösung.*

*Beweis.* Sei $P_0(M) = R^{(M)}$ der freie $R$-Modul über der Menge $M$ und $\mu_0$ die Koeins des adjungierten Paares (Frei, Vergiss), d.h. $\mu_0 \colon P_0(M) \twoheadrightarrow M, e_m \longmapsto m$. Induktiv erhält man mit $P_n(M) = R^{(\ker \mu_{n-1})}$ die exakte Folge

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{P}(M) = \ \cdots \arrow[r] & P_2(M) \arrow[rr, dashed, "\mu_2"] \arrow[dr] & & P_1(M) \arrow[rr, dashed, "\mu_1"] \arrow[dr] & & P_0(M) \arrow[r, "\mu_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \ker \mu_1 \arrow[ur] & & \ker \mu_0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

in der alle $P_i(M)$ sogar frei sind. Zu jedem Homomorphismus $u \colon M \longrightarrow N$ definiert man

$$\begin{tikzcd}
e_m \in P_0(M) \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, dashed, "P_0(u)"] & M \arrow[d, "u"] \\
e_{u(m)} \in P_0(N) \arrow[r, "\nu_0"'] & N
\end{tikzcd}$$

und induktiv

$$\begin{tikzcd}
P_n(M) \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, "P_n(u)"'] & P_{n-1}(M) \arrow[d, "P_{n-1}(u)"] \\
P_n(N) \arrow[r, "\nu_n"'] & P_{n-1}(N)
\end{tikzcd}$$

mit $P_n(u)(e_x) = e_{P_{n-1}(u)(x)}$ für $x \in \ker \mu_{n-1}$, denn $P_{n-1}(u)(x) \in \ker \nu_{n-1}$. Damit ist $\mathfrak{P}(u) = (\dots, P_1(u), P_0(u), u) \colon \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(N)$ ein Komplexhomomorphismus und $\mathfrak{P} \colon R$-**Mod** $\longrightarrow R$-**Kom** ein Funktor. Die Auflösung $\mathfrak{P}(M)$ heißt die *kanonische projektive Auflösung* von $M$. $\square$

Für jeden $R$-Modul $M \neq 0$ heißt

$$\operatorname{pd}(M) = \inf\{\operatorname{len}(\mathfrak{A}) \colon \mathfrak{A} \text{ ist eine projektive Auflösung von } M\}$$

die *projektive Dimension* von $M$.

**Beispiele.**

- Ist $M \neq 0$ projektiv, so ist $\operatorname{pd}(M) = 0$, denn $\mathfrak{A} = \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ ist eine projektive Auflösung der Länge 0.

- Ist $R$ ein Integritätsring, $r \in R$ weder 0 noch Einheit und $M = R/(r)$, so ist $\operatorname{pd}(M) = 1$, denn

$$\mathfrak{A} = \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dash] & 0 \arrow[r, dash] & R \arrow[r, dash, "\hat{r}"] & R \arrow[r, dash] & M \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$

  ist eine projektive Auflösung der Länge 1. Wäre $\operatorname{pd}(M) = 0$, so gäbe es eine projektive Auflösung $\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_0 \twoheadrightarrow M \longrightarrow 0$ der Länge 0, so wäre $M$ projektiv, also $(r) \subset^{\oplus} R$, was unmöglich ist.

**Bemerkung.** Ist $r_1, \dots, r_n$ eine $R$-Sequenz, d.h. $(r_1, \dots, r_n) \subsetneq R$ und $r_i$ Nichtnullteiler bezüglich $R/(r_1, \dots, r_{i-1})$ für alle $i$, so ist $\operatorname{pd}(R/(r_1, \dots, r_n)) = n$.

**Satz 1.** *Sei $u \colon M \longrightarrow N$ ein $R$-Homomorphismus, $\mathfrak{A}$ eine projektive Auflösung von $M$, $\mathfrak{B}$ eine projektive Auflösung von $N$. Dann gibt es bis auf Homotopie genau einen Komplexhomomorphismus $f \colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ mit $f_{-1} = u$, eine* Fortsetzung *von $u$.*

*Beweis.* Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} = \cdots \arrow[r, dash] & A_n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dashed, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dashed, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, dash] & A_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dashed, "f_1"] & A_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dashed, "f_0"] & M \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "u"] & 0 \\ \mathfrak{B} = \cdots \arrow[r, dash] & B_n \arrow[r, dash] & B_{n-1} \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & B_1 \arrow[r, dash] & B_0 \arrow[r, dash] & N \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$

ist $A_0$ projektiv und $\beta_0$ surjektiv, also existiert ein $f_0$ mit $f_0\beta_0 = u\alpha_0$. Bei $n > 0$ ist $A_n$ projektiv und $\operatorname{im}(f_{n-1}\alpha_n) \subset \ker \beta_{n-1} = \operatorname{im} \beta_n$, also existiert ein $f_n$ mit $f_n\beta_n = f_{n-1}\alpha_n$. Es genügt also, dass alle $A_i$ projektiv sind und $\mathfrak{B}$ exakt ist.

Ist $g \colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ eine zweite Fortsetzung von $u$, so müssen wir eine Homotopie, d.h. Homomorphismen $s_n \colon A_n \longrightarrow B_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, angeben mit $f_n - g_n = \beta_{n+1}s_n + s_{n-1}\alpha_n$.

Weil $A_0$ projektiv ist und $\mathrm{im}(f_n - g_n) \subset \ker\beta = \mathrm{im}\,\beta_1$, existiert ein $s_0\colon A_0 \longrightarrow B_1$ mit $f_0 - g_0 = \beta_1 s_0$, mit $s_i = 0$ für $i < 0$, also $f_0 - g_0 = \beta_1 s_0 + s_{-1}\alpha_0$.

Hat man bereits $\dots, s_{n-2}, s_{n-1}$, gilt $\mathrm{im}(f_n - g_n - s_{n-1}\alpha_n) \subset \ker\beta_n = \mathrm{im}\,\beta_{n+1}$, denn

$$\begin{aligned}\beta_n(f_n - g_n - s_{n-1}\alpha_n) &= (f_{n-1} - g_{n-1})\alpha_n - \beta_n s_{n-1}\alpha_n = \\ &= \beta_n s_{n-1}\alpha_n + s_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n - \beta_n s_{n-1}\alpha_n = 0,\end{aligned}$$

also existiert ein $s_n\colon A_n \longrightarrow B_{n+1}$ mit $f_n - g_n = \beta_{n+1}s_n - s_{n-1}\alpha_n$. □

**Folgerung 1.** Zwei projektive Auflösungen von $M$ sind stets homotopieäquivalent.

*Beweis.* Sei allgemeiner $u\colon M \xrightarrow{\sim} N$ ein Isomorphismus und $\mathfrak{A}$ eine projektive Auflösung von $M$, $\mathfrak{B}$ eine projektive Auflösung von $N$ und $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ eine Fortsetzung von $u$. Dann ist $f$ eine Homotopieäquivalenz, denn mit $vu = 1_M$ und $uv = 1_N$ sei $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ eine Fortsetzung von $v$. Dann ist $gf$ eine Fortsetzung von $vu = 1_M$, also nach Satz 1 $gf \simeq 1_{\mathfrak{A}}$ und ebenso $fg \simeq 1_{\mathfrak{B}}$. □

**Folgerung 2.** Sind $u, v\colon M \longrightarrow N$ zwei Homomorphismen, so ist $\mathfrak{P}(u+v) \simeq \mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}(v)$, denn beide Seiten sind Fortsetzungen von $u + v$.

**Folgerung 3.** Ist $\mathfrak{A}$ eine projektive Auflösung von $M \neq 0$ und $\mathrm{pd}(M) \leq n < \infty$, so ist $\mathrm{im}(\alpha_n)$ projektiv, also auch

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{im}(\alpha_n) \subset A_{n-1} \longrightarrow A_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von $M$.

*Beweis.* $M$ hat eine projektive Auflösung

$$\mathfrak{B} = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B_{n_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

also existieren $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ und $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ mit $gf \simeq 1_{\mathfrak{A}}$, speziell mit $1_{A_n} - g_n f_n = \alpha_{n+1}s_n + s_{n-1}\alpha_n$ folgt $\alpha_{n+1} - g_n f_n \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}s_n\alpha_{n+1}$, d.h. $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}s_n\alpha_{n+1}$. Also ist $\mathrm{im}\,\alpha_{n+1} \oplus \ker(\alpha_{n+1}s_n) = A_n$, $\ker\alpha_n \subset^{\oplus} A_n$, $A_n/\ker\alpha_n \cong \mathrm{im}\,\alpha_n$ projektiv. □

**Beispiel.** Sei $R = \mathbb{Z}/(p^2)$ und $r = \overline{p}$. Dann ist für $M = R/(r)$ die projektive Dimension $\mathrm{pd}(M) = \infty$.

*Beweis.* $(r)$ ist das einzige nichttriviale Ideal in $R$, so dass Kern und Bild des Homomorphismus $\hat{r}\colon M \longrightarrow M$ gerade $(r)$ sind. Damit ist

$$\mathfrak{A} = \ \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{\hat{r}} R \xrightarrow{\hat{r}} R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von $M$ und kein $\mathrm{im}(\alpha_n)$ projektiv. □

**Satz 2.** *Sei*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dash] & A \arrow[r, dash, "u"] & B \arrow[r, dash, "v"] & C \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$

*eine kurze exakte Folge von R-Moduln, $\mathfrak{A}$ eine projektive Auflösung von A, $\mathfrak{C}$ eine projektive Auflösung von C. Dann gibt es eine projektive Auflösung $\mathfrak{B}$ von B und eine exakte Folge*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dash] & \mathfrak{A} \arrow[r, dash, "f"] & \mathfrak{B} \arrow[r, dash, "g"] & \mathfrak{C} \arrow[r, dash] & 0, \end{tikzcd}$$

*sodass $f$ eine Fortsetzung von $u$ und $g$ eine Fortsetzung von $v$ ist.*

*Beweis.* Für alle $n \geq 0$ ist $B_n = A_n \times C_n$ projektiv und

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dash] & A_n \arrow[r, dash, "f_n"] & B_n \arrow[r, dash, "g_n"] & C_n \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$

exakt mit $a \longmapsto (a, 0)$ und $(a, c) \longmapsto c$. Es bleibt, induktiv die $\beta_n \colon B_n \longrightarrow B_{n-1}$ zu konstruieren. Sei zuerst $n = 0$. Man wähle

$$\begin{tikzcd} & C_0 \arrow[dl, dashed, dash, "\varphi_0"'] \arrow[d, dash, "\gamma_0"] \\ B \arrow[r, dash, "v"'] & C \end{tikzcd}$$

und mit $\beta_0 \colon B_0 \longrightarrow B, (a, c) \longmapsto u\alpha_0(a) + \varphi_0(c)$ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dash] & A_0 \arrow[r, dash, "f_0"] \arrow[d, dash, "\alpha_0"'] & B_0 \arrow[r, dash, "g_0"] \arrow[d, dash, "\beta_0"'] & C_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\gamma_0"'] & 0 \\ 0 \arrow[r, dash] & A \arrow[r, dash, "u"'] & B \arrow[r, dash, "v"'] & C \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$

Nach dem Schlangenlemma ist

$$\begin{tikzcd} 0 = \operatorname{coker} \alpha_0 \arrow[r, dash] & \operatorname{coker} \beta_0 \arrow[r, dash] & \operatorname{coker} \gamma_0 = 0 \end{tikzcd}$$

exalt, also $\beta_0$ surjektiv.

Bei $n > 0$ folgt aus

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & \\
0 \arrow[r, dash] & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & A_{n-2} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B_{n-2} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{n-2} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

und der langen exakten Homologiefolge die Exaktheit von

$$\ker \beta_{n-1} \;\text{——}\; \ker \gamma_{n-1} \;\text{——}\; H_{n-2}(\mathfrak{A}) = 0,$$

also

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[dl, dashed, dash, "\varphi_n"'] \arrow[d, dash] \\
\ker \beta_{n-1} \arrow[r, dash] & \ker \gamma_{n-1}
\end{tikzcd}$$

sodass der Homomorphismus $\beta_n \colon B_n \longrightarrow B_{n-1}, (a, c) \longmapsto f_{n-1}\alpha_n(a) + \varphi_n(c)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & \\
0 \arrow[r, dash] & A_n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\alpha_n"'] & B_n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\beta_n"'] & C_n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\gamma_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Natürlich ist $\operatorname{im} \beta_n \subset \ker \beta_{n-1}$ und die lange exakte Homologiefolge

$$0 = H_{n-1}(\mathfrak{A}) \;\text{——}\; H_{n-1}(\mathfrak{B}) \;\text{——}\; H_{n-1}(\mathfrak{C}) = 0$$

liefert Exaktheit bei $B_{n-1}$. $\square$

**Folgerung 1.** Sei
$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Folge von $R$-Moduln $\neq 0$. Dann ist $\mathrm{pd}(B) \leq \max\{\mathrm{pd}(A), \mathrm{pd}(C)\}$.

*Beweis.* Wenn $\mathrm{pd}(A) = \infty$ oder $\mathrm{pd}(C) = \infty$, ist die Aussage klar. Ist $\mathrm{pd}(A) = n < \infty$ und $\mathrm{pd}(C) = k < \infty$, kann man projektive Auflösungen $\mathfrak{A}$ von $A$ und $\mathfrak{C}$ von $C$ wählen mit $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = 0$ und $C_{k+1} = C_{k+2} = \cdots = 0$. Mit $m = \max\{n, k\}$ ist in der obigen Konstruktion $B_{m+1} = A_{m+1} \times C_{m+1} = 0$ und ebenso $B_{m_2} = \cdots = 0$. Also ist $\mathrm{pd}(B) \leq m$. □

**Folgerung 2.** Seien in $0 \neq A \subsetneq B$ beide Moduln von endlicher projektive Dimension. Dann ist auch $B/A$ von endlicher projektiver Dimension, es gilt $\mathrm{pd}(B/A) = \mathrm{pd}(B)$ falls $\mathrm{pd}(A) < \mathrm{pd}(B)$, $\mathrm{pd}(B/A) = \mathrm{pd}(A) + 1$ falls $\mathrm{pd}(A) > \mathrm{pd}(B)$ und $\mathrm{pd}(B/A) \leq \mathrm{pd}(A) + 1$ falls $\mathrm{pd}(A) = \mathrm{pd}(B)$.

*Beweis.* Sei $\mathrm{pd}(A) = n < \infty$, $\mathrm{pd}(B) = m < \infty$ und
$$\mathfrak{A} = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$
eine projektive Auflösung von $A$, $\mathfrak{C}$ eine projektive Auflösung von $C = B/A$ und dazu nach dem Satz
$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$
exakt. Im Fall $n < m$ zeigt
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, no head] \arrow[d, no head] & B_{n+1} \arrow[r, no head, "\sim"] \arrow[d, no head] & C_{n+1} \arrow[d, no head] \\ A_n \arrow[r, no head] & B_n \arrow[r, no head] & C_n \end{tikzcd}$$
und $\mathrm{im}\,\beta_{m+1} \subset^{\oplus} B_m$, dass $\mathrm{im}\,\gamma_{m+1} \subset^{\oplus} C_m$ und $\mathrm{pd}(B/A) \leq m$. Angenommen es wäre $\mathrm{pd}(B/A) < m$, hätten wir $C_m = C_{m+1} = \cdots = 0$ gewählt und es folgte $B_m = 0$, was unmöglich ist.

Im Fall $n \geq m$ folgt aus $\mathrm{im}\,\beta_{n+2} \subset^{\oplus} B_{n+1}$, also wieder $\mathrm{im}\,\gamma_{n+2} \subset^{\oplus} C_{n+1}$, dass $\mathrm{pd}(B/A) \leq n + 1$. Ist sogar $n > m$ und wäre $\mathrm{pd}(B/A) \leq \mathrm{pd}(A) = n$, so hätten wir $C_n = C_{n+1} = \cdots = 0$ gewählt und in
$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, no head] \arrow[d, no head] & B_n \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "\beta_n"] & 0 \arrow[d, no head] \\ A_{n-1} \arrow[r, no head] & B_{n-1} \arrow[r, no head] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

wäre $\beta_n$ ein zerfallender Monomorphismus (genauer $\operatorname{im}\beta_n \subset^{\oplus} B_{n-1}$, weil $n > \operatorname{pd}(B)$), also auch $\beta_n f_n = f_{n-1}\alpha_n$, also auch $\alpha_n$, d.h. $\operatorname{im}\alpha_n \subset^{\oplus} A_{n-1}$ und $\operatorname{pd}(A) \leq n-1$, was unmöglich ist. $\square$

**Bemerkung.** Sind $A$ und $B$ beide projektiv, so gilt $\operatorname{pd}(B/A) \leq 1$. Ist sogar $A \subset^{\oplus} B$, so gilt $\operatorname{pd}(B/A) = 0$. Zum Beispiel ist $0 \neq (n) \neq \mathbb{Z}$ und $\operatorname{pd}(\mathbb{Z}/(n)) = 1$.

Eine *injektive Auflösung* von $M$ ist eine exakte Folge

$$\mathfrak{A} = \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^0} A^0 \xrightarrow{\alpha^1} A^1 \xrightarrow{\alpha^2} A^2 \longrightarrow \cdots$$

in der alle $A^i$ injektiv sind. Ist $M \neq 0$ heißt $\operatorname{len}(\mathfrak{A}) = \sup\{i \in \mathbb{N} \colon A^i \neq 0\}$ die *Länge* von $\mathfrak{A}$ und $\operatorname{id}(M) = \inf\{\operatorname{len}(\mathfrak{A}) \colon \mathfrak{A}$ ist eine injektive Auflösung von $M\}$ die *injektive Dimension* von $M$.

**Lemma 2.**

(i) $C = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *ist ein injektive $R$-Linksmodul und zu* $0 \neq f \colon M \longrightarrow N$ *in $R$-**Mod** gibt es stets ein $\tau \colon N \longrightarrow C$ mit $\tau f \neq 0$. $C$ heißt auch* injektiver Kogenerator *in $R$-**Mod**.*

(ii) *Für jeden $R$-Modul $M$ ist der $R$-Modul $Q^0(M) = C^{\operatorname{Hom}_R(M,C)}$ injektiv und die Abbildung $\mu^0 \colon M \longrightarrow Q^0(M)$, definiert durch $\pi_f \mu^0 = f$, ist eine Einbettung. Ist $u \colon M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus, so kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mu^0"] \arrow[d, "u"'] & Q^0(M) \arrow[d, dashed, "Q^0(u)"] \\
N \arrow[r, "\nu^0"'] & Q^0(N)
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Weil $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul teilbar, also injektiv ist und $R_R$ flach ist, ist der $R$-Linksmodul $C = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ injektiv. Sei nun zuerst $R = \mathbb{Z}$. Für jeden Gruppenhomomorphismus $0 \neq \alpha \colon A \longrightarrow B$ ist $\operatorname{im}\alpha \neq 0$, also existiert ein $0 \neq b_0 \in \operatorname{im}\alpha$. Dann ist $\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(b_0) \subset (p) \subsetneq \mathbb{Z}$ für eine Primzahl $p$, also $Zb_0 \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, rb_0 \longmapsto \overline{r/p}$ wohldefiniert und lässt sich zu einem $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\tau \colon B \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hochheben. Aus $\tau(b_0) = \overline{1/p} \neq 0$ folgt $\tau\alpha \neq 0$.

Ist nun $R$ beliebig, so ist $F = R \otimes_R - \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ linksadjungiert zu $G = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -) \colon \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$, also folgt aus $0 \neq f \colon M \longrightarrow N$ auch $0 \neq F(f) \colon F(M) \longrightarrow F(N)$. Also existiert nach dem Fall $R = \mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\beta \colon F(N) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\beta F(f) \neq 0$. Mit $\tau = \overline{\beta} \colon N \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C$ folgt dann $\tau f \neq 0$.

Mit $I = Hom_R(M, C)$ ist $C^I$ natürlich injektiv und $\mu^0 \colon M \longrightarrow C^I$ ein Monomorphismus, denn ist $0 \neq x \in M$, so existiert ein $\tau \in I$ mit $\tau(x) \neq 0$, d.h. es ist $\mu^0(x) \neq 0$. Mit

$u\colon M \longrightarrow N$ und $J = \operatorname{Hom}_R(N, C)$ macht $Q^0(u)\colon C^I \longrightarrow C^J$ mit $Q^0(u)(c_f)_f = (c_{gu})_g$ das Quadrat kommutativ. $\square$

Definiert man induktiv $Q^n(M) = Q^0(\operatorname{coker} \mu^{n-1})$ für alle $n > 0$, erhält man die *kanonische injektive Auflösung*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathfrak{Q}(M) = 0 \arrow[r, dash] & M \arrow[r, dash, "\mu^0"] & Q^0(M) \arrow[r, dash, "\mu^1"] \arrow[dr, dash] & Q^1(M) \arrow[r, dash] & \cdots \\
 & & & \operatorname{coker} \mu^0 \arrow[u, dash] &
\end{tikzcd}$$

und für jedes $u\colon M \longrightarrow N$ entsprechend $\mathfrak{Q}(u) = (u, Q^0(u), \dots)\colon \mathfrak{Q}(M) \longrightarrow \mathfrak{Q}(N)$.

Entsprechend den obigen Resultaten zeigt man: Zwei injektive Auflösungen eines $R$-Moduls $M$ sind stets Homotopieäquivalent, und ist $\mathfrak{A} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow A^0 \longrightarrow \cdots$ eine injektive Auflösung von $M \neq 0$ sowie $\operatorname{id}(M) \leq n < \infty$, so ist $\operatorname{im} \alpha^n$ injektiv. Mit dem dualen Hufeisenlemma erhält man:

Sind $0 \neq A \subsetneq B$ $R$-Moduln mit injektiven Dimensionen $\operatorname{id}(B) < \infty$ und $\operatorname{id}(B/A) < \infty$, so ist $\operatorname{id}(A) = \operatorname{id}(B)$ falls $\operatorname{id}(B/A) < \operatorname{id}(B)$, $\operatorname{id}(A) = \operatorname{id}(B/A) + 1$ falls $\operatorname{id}(B/A) > \operatorname{id}(B)$ und $\operatorname{id}(A) \leq \operatorname{id}(B/A) + 1$ falls $\operatorname{id}(B/A) = \operatorname{id}(B)$.

Ein Untermodul $U$ von $M$ heißt *groß* (essential) in $M$, wenn für jeden Untermodul $X \subset M$ mit $X \cap U$ stets folgt $X = 0$, d.h. zu jedem $0 \neq x \in M$ ein $r \in R$ existiert mit $0 \neq rx \in U$.

**Beispiele.**

(i) Ist $R$ ein Integritätring, so ist jeder Untermodul $U \neq 0$ des Quotientenkörper $K$ von $R$ groß in $K$, denn ist $0 \neq r/s \in K$ und $0 \neq a/b \in U$, so ist $0 \neq sa(r/s) \in U$.

(ii) Ist $U$ groß in $M$ und direkter Summand, so ist $U = M$. Speziell ist in jedem Vektorraum $V$ nur $U = V$ groß.

(iii) Ist $U \subset M$ beliebig und $V_0$ ein maximales Element in $\{U \subset W\colon V_0 \cap M = 0\}$, $W_0$ ein maximales Element in $\{U \subset W\colon V_0 \cap W = 0\}$, so ist $U$ groß in $W_0$ und das Bilder der Diagonale $d\colon M \longrightarrow M/V_0 \times M/W_0$ groß im Ziel.
Sei zuerst $0 \neq x \in W_0$. Dann ist $(Rx + V_0) \cap U \neq 0$ wegen der Maximalität von $V_0$, also $rx + v = 0 \neq 0$ für gewisse $r$, $v$ und $u$. Damit ist $v = u - rx \in V_0 \cap W_0 = 0$, also $rx = u \neq 0$.
Für die Diagonale $d$ ist $\operatorname{im} d \subset M/V_0 \times M/W_0$ groß, denn sei $0 \neq (\overline{a}, \overline{b})$. Dann existiert ein $r \in R$ mit $0 \neq r(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{w_0}, \overline{b_0})$, denn bei $\overline{a} = 0$ wähle $r = 1$ und $w_0 = 0$, bei $\overline{a} \neq 0$, also $(Ra + V_0) \cap W_0 \neq 0$, wähle $ra + v_0 = w_0 \neq 0$, also $r\overline{a} = \overline{w_0}$. Ebenso existiert ein $s \in R$ mit $0 \neq s(\overline{w_0}, \overline{b_0}) = (\overline{w_1}, \overline{v_1})$ mit $w_1 \in W_0$ und $v_1 \in V_0$. Damit folgt $0 \neq rs(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{w_1}, \overline{v_1}) = (\overline{v_1 + w_1}, \overline{v_1 + w_1}) \in \operatorname{im}(d)$.

**Folgerung 3.** War $M$ in (3) zusätzlich injektiv, so ist $M \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}(d)$, also das Bild $\operatorname{im}(d) \subset^{\oplus} M/V_0 \times M/W_0$ groß, also $d$ ein Isomorphismus. Das heißt es gilt $V_0 \oplus W_0 = M$, und insgesamt ist $U$ groß in $W_0 \subset^{\oplus} M$.

Eine injektive Auflösung

$$\mathfrak{A} = \; 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^0} A^0 \xrightarrow{\alpha^1} A^1 \xrightarrow{\alpha^2} A^2 \longrightarrow \cdots$$

heißt *minimal*, wenn $\operatorname{im}(\alpha^i) \subset A^i$ groß ist für alle $i \geq 0$.

**Satz 3.** *Jeder $R$-Modul $M$ besitzt eine minimale injektive Auflösung. Je zwei minimale injektive Auflösungen von $M$ sind zueinander isomorph.*

*Beweis.* Man hat $M \subset Q$ mit $Q$ injektiv, also ist nach (3) $M$ groß in $A^0 \subset^{\oplus} Q$ und $A_0$ wieder injektiv, und induktiv erhält man in

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha^0", "\text{groß}"'] & A^0 \arrow[rr, dashed, "\alpha^1"] \arrow[dr] & & A^1 \arrow[rr, dashed, "\alpha^2"] \arrow[dr] & & A^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & \operatorname{coker}\alpha^0 \arrow[ur, "\text{groß}"'] & & \operatorname{coker}\alpha^1 \arrow[ur, "\text{groß}"'] & &
\end{tikzcd}$$

die gewünschte minimale injektive Auflösung von $M$.

Allgemeiner gilt für jeden Isomorphismus $u\colon M \xrightarrow{\sim} N$: Ist $\mathfrak{A}$ eine minimale injektive Auflösung von $M$, $\mathfrak{B}$ eine minimale injektive Auflösung von $N$ und $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ eine Fortsetzung von $u$, so ist $f$ ein Isomorphismus. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d, "u"', "\wr"] & A^0 \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d, "f^0"'] & A^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta^0"'] & B^0 \arrow[r, "\beta^1"'] & B^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

liefert $\operatorname{im}(\alpha^0) \cap \ker(f^0) = 0$, also $\ker(f^0) = 0$, und aus $\operatorname{im}(\beta^0) \subset \operatorname{im}(f^0) \subset B^0$ folgt, da $\operatorname{im}(f^0)$ injektiv ist, dass $\operatorname{im}(f^0) \subset^{\oplus} B^0$ groß ist, also $\operatorname{im}(f^0) = B^0$. Also ist $f^0$ ein Isomorphismus. Ebenso erhält man induktiv, dass $f^i$ für alle $i \geq 1$ ein Isomorphismus ist. $\square$

**Folgerung 1.** Ist $\mathfrak{A} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow A^0 \longrightarrow \cdots$ eine minimale injektive Auflösung von $M \neq 0$ und $\operatorname{id}(M) = n < \infty$, so folgt $A^{n+1} = A^{n+2} = \cdots = 0$.

*Beweis.* Es ist $\operatorname{im}(\alpha^n)$ injektiv und $\operatorname{im}(\alpha^n) \subset A^n$ groß, also $\operatorname{im}(\alpha^n) = A^n$, also $A^{n+1} = A^{n+2} = \cdots = 0$. $\square$

# VI. Abgeleitete Funktoren

Zu einem Komplex

$$\mathfrak{A} = \; \cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

heißt

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \; \cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \longrightarrow 0$$

der *reduzierte Anteil* von $\mathfrak{A}$.

Ist $M$ ein $R$-Linksmodul, $\mathfrak{P}(M) = \cdots \longrightarrow P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ die kanonische projektive Auflösung und $F\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ ein additiver, kovarianter Funktor, so heißt der $n$-te Homologiemodul von

$$F\widetilde{\mathfrak{P}}(M) = \; \cdots \longrightarrow FP_2(M) \longrightarrow FP_1(M) \longrightarrow FP_0(M) \longrightarrow 0$$

die *$n$-te Linksableitung* von $F$ an der Stelle $M$, in Zeichen $L_nF(M) = H_n(F\widetilde{\mathfrak{P}}(M)) = \ker(F\mu_n)/\operatorname{im}(F\mu_{n+1})$.

**Bemerkungen.**

(i) Auch $L_nF\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ ist ein additiver, kovarianter Funktor, denn $\mathfrak{P}$, $(-)^{\sim}$, $F$ und $H_n$ sind kovariante Funktoren. Sind $u, v\colon M \longrightarrow N$ zwei $R$-Homomorphismen, gilt $\mathfrak{P}(u+v) \simeq \mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}(v)$, also auch $F\widetilde{\mathfrak{P}}(u+v) \simeq F\widetilde{\mathfrak{P}}(u) + F\widetilde{\mathfrak{P}}(v)$, da $F$ additiv ist. Es folgt $L_nF(u+v) = H_nF\widetilde{\mathfrak{P}}(u+v) = H_nF\widetilde{\mathfrak{P}}(u) + H_nF\widetilde{\mathfrak{P}}(v) = L_nF(u) + L_nF(v)$.

(ii) Es gibt eine natürliche Transformation $\lambda\colon L_0F \longrightarrow F$.
Sei

$$\mathfrak{A} = \; \cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

die kanonische projektive Auflösung von $M$, sodass nach Definition $L_0F(M) = H_0(F\widetilde{\mathfrak{A}}) = \operatorname{coker} F(\alpha_1)$ ist, also in

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "F(\alpha_1)"] \arrow[dr, "0"'] & F(A_0) \arrow[r] \arrow[d, "F(\alpha_0)"] & L_0F(M) \arrow[dl, dashed, "\lambda_M"] \\
 & F(M) &
\end{tikzcd}$$

der Homomorphismus $\lambda_M$ durch die Kommutativität des rechten Dreiecks eindeutig bestimmt ist. Für die Natürlichkeit von $\lambda$ sei $u\colon M \longrightarrow N$ ein $R$-Homomorphismus, $\mathfrak{B}$ die kanonische projektive Auflösung von $N$ und $f = \mathfrak{P}(u)$ der von $u$

induziert Komplexhomomorphismus. Im Prisma

$$\begin{tikzcd}
F(A_0) \arrow[rr] \arrow[dd, "F(f_0)"'] \arrow[dr] & & L_0F(M) \arrow[dd, "L_0F(u)"] \arrow[dl, dashed, "\lambda_M"] \\
& F(M) \arrow[dd, "F(u)"] & \\
F(B_0) \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_0F(N) \arrow[dl, dashed, "\lambda_N"] \\
& F(N) &
\end{tikzcd}$$

sind dann Deckel und Boden kommutativ, ebenso die Rückwand und die linke Seite, also auch die rechte Seite, d.h. $F(u)\lambda_M = \lambda_N L_0F(u)$.

(iii) Ist $F$ rechtsexakt, so ist $\lambda$ eine Äquivalenz $L_0F \xrightarrow{\sim} F$; ist $F$ exakt, so gilt $L_nF = 0$ für alle $n \geq 1$.
Im ersten Fall ist auch $F(A_1) \longrightarrow F(A_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$ exakt, d.h. im $F(\alpha_1) = \ker F(\alpha_0)$, also $\lambda_M$ ein Isomorphismus. Im zweiten Fall ist $F\mathfrak{A}$ an allen Stellen $i \geq 1$ exakt, d.h. $L_iF(M) = H_i(F\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$.

(iv) Genau dann ist $L_nF = 0$ für alle $n \geq 0$, wenn $L_0F = 0$, was genau dann der Fall ist, wenn $F$ auf allen projektiven $R$-Moduln verschwindet.
Sei $L_0F = 0$. In (2) hat man $\alpha_0 \colon A_0 \twoheadrightarrow P$, also $\alpha_0\sigma = 1_P$ für ein gewisses $\sigma$. Dann ist $F(\alpha_0)F(\sigma) = 1_{F(P)}$, also $\lambda_P \colon L_0F(P) \twoheadrightarrow F(P)$ ein Epimorphismus. Aber $L_0F(P) = 0$, also auch $F(P) = 0$.

**Lemma 1.** *Sei $F \colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** additiv und kovariant, $u \colon M \longrightarrow N$ ein $R$-Homomorphismus, $\mathfrak{A}'$ eine projektive Auflösung von $M$, $\mathfrak{B}'$ eine von $N$ und $f' \colon \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{B}'$ eine Fortsetzung von $u$. Dann hat man für jedes $n \geq 0$ ein kommutatives Quadrat*

$$\begin{tikzcd}
H_nF(\widetilde{\mathfrak{A}'}) \arrow[r, "H_n(\widetilde{f'})"] \arrow[d, "\wr"] & H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}'}) \arrow[d, "\wr"] \\
L_nF(M) \arrow[r, "L_nF(u)"'] & L_nF(N).
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Sei allgemeiner

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v"'] & N' \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "u"] & N
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Quadrat in $R$-**Mod** und in

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}' \arrow[r, dash, "f'"] \arrow[d, dash, "a"'] & \mathfrak{B}' \arrow[d, dash, "b"] \\ \mathfrak{A} \arrow[r, dash, "f"] & \mathfrak{B} \end{tikzcd}$$

seien alle Komplexe projektive Auflösungen und die Komplexhomomorphismen seien Fortsetzungen der $R$-Abbildungen. Weil $f \circ a$ und $b \circ f'$ beide Fortsetzungen von $u \circ v = w \circ u'$ sind, gilt $f \circ a \simeq b \circ f'$ nach (5,S1), also $H_nF(\widetilde{f}) \circ H_nF(\widetilde{a}) = H_nF(\widetilde{b}) \circ H_nF(\widetilde{f'})$, d.h. es ist kommutativ

$$\begin{tikzcd} H_nF(\widetilde{\mathfrak{A}'}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}'}) \arrow[d, dash] \\ H_nF(\widetilde{\mathfrak{A}}) \arrow[r, dash] & H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}}) \end{tikzcd}$$

Sind jetzt speziell $v$ und $w$ Isomorphismen und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die kanonischen projektiven Auflösungen, sind in

$$\begin{tikzcd} H_nF(\widetilde{\mathfrak{A}'}) \arrow[r, dash, "H_n(\widetilde{f'})"] \arrow[d, dash, "\wr"] & H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}'}) \arrow[d, dash, "\wr"] \\ L_nF(M) \arrow[r, dash, "L_nF(u)"'] & L_nF(N) \end{tikzcd}$$

$a$ und $b$ Homotopieäquivalenzen. □

**Folgerung 1.** Ist $M \neq 0$ und $\mathrm{pd}(M) = n < \infty$, gilt $L_iF(M) = 0$ für alle $i > n$.

*Beweis.* Man hat eine spezielle projektive Auflösung

$$\mathfrak{A}' = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A'_n \longrightarrow A'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Also ist $H_iF(\widetilde{\mathfrak{A}'}) = 0$ für alle $i > n$. □

**Satz 1.** *Sei $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow T$-**Mod** additiv und kovariant und*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

*eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Dann gibt es verbindende Homomorphismen* $\delta_n\colon L_nF(C) \longrightarrow L_{n-1}F(A)$ *für* $n \geq 1$*, so dass*

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1}F(C) \longrightarrow L_nF(A) \longrightarrow L_nF(B) \longrightarrow L_nF(C) \longrightarrow L_{n-1}F(A) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow L_1F(C) \longrightarrow L_0F(A) \longrightarrow L_0F(B) \longrightarrow L_0F(C) \longrightarrow 0$$

*exakt ist.*

*Beweis.* Ist

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$$

exakt und zerfallend und $F\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ additiv und kovariant, so ist auch

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z) \longrightarrow 0$$

exakt und zerfallend, denn mit $\mathrm{im}(\alpha) \oplus Y_1 = Y$ erhält man $\rho\alpha = 1_X$ (mit $\alpha(x) + y_1 = y$ setze $\rho(y) = x$), $\beta\sigma = 1_Z$ (mit $z = \beta(y_1)$ setze $\sigma(z) = y_1$) und es gilt $\alpha\rho + \sigma\beta = 1_Y$, sodass auch $F(\alpha)$ ein zerfallender Monomorphismus ist, $F(\beta)$ ein zerfallender Epimorphismus, sowie $\operatorname{im} F(\alpha) = \ker F(\beta)$: Für $p \in \ker F(\beta)$ ist $p = F(\alpha)F(\rho)(p) + F(\sigma)F(\beta)(p) = F(\alpha)F(\rho)(p) \in \operatorname{im} F(\alpha)$.

Zur Definition der $\delta_n$ wähle nach dem Hufeisenlemma eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathfrak{P}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{P}(C) \longrightarrow 0$$

in der $\mathfrak{B}$ eine projektive Auflösung von $B$ ist und $f_{-1} = u$, $g_{-1} = v$. Dann ist auch

$$0 \longrightarrow F\widetilde{\mathfrak{P}}(A) \longrightarrow F\widetilde{\mathfrak{B}} \longrightarrow F\widetilde{\mathfrak{P}}(C) \longrightarrow 0$$

exakt und die dazugehörige lange exakte Homologiefolge lautet

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_{n+1}F(C) \arrow[r] & L_nF(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & L_nF(C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_{n-1}F(A) \arrow[r] & \cdots \\
& & L_nF(A) \arrow[r] & L_nF(B) \arrow[r] & L_nF(C) & &
\end{tikzcd}$$

Nach (L1) sind die beiden Quadrate kommutativ. $\square$

**Folgerung 1.** Für jeden additiven kovarianten Funktor $F\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ ist $L_0F$ rechtsexakt.

*Beweis.* Ist
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$
exakt, so auch
$$L_0F(B) \longrightarrow L_0F(C) \longrightarrow 0,$$
d.h. $L_0F(v)$ ein Epimorphismus.
Ist aber nur
$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$
exakt, folgt aus der Exaktheit von
$$L_1F(C) \longrightarrow L_0F(A/\ker u) \longrightarrow L_0F(B) \longrightarrow L_0F(C) \longrightarrow 0$$
die Exakheit von
$$L_0F(A) \longrightarrow L_0F(B) \longrightarrow L_0F(C) \longrightarrow 0,$$
denn es gibt mit kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & A/\ker u \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
und $L_0F$ erhält Epimorphismen. $\square$

**Folgerung 2.** Ist $L_nF = 0$ für ein $n \geq 0$, folgt $L_iF = 0$ für alle $i > n$.

*Beweis.* Es genügt $L_{n+1}F = 0$ zu zeigen. Sei $M \in R$-**Mod** und
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
exakt mit $A_0$ projektiv. Dann ist auch
$$L_{n+1}F(A_0) \longrightarrow L_{n+1}F(M) \longrightarrow L_nF(K)$$
exakt, also $L_{n+1}F(M) = 0$ wegen $L_nF = 0$ und $A_0$ projektiv. $\square$

**Lemma 2.** *Sei*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dash] & A \arrow[r, dash, "u"] \arrow[d, dash, "p"] & B \arrow[r, dash, "v"] \arrow[d, dash, "q"] & C \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & A' \arrow[r, dash, "u'"'] & B' \arrow[r, dash, "v'"'] & C' \arrow[r, dash] & 0
\end{tikzcd}$$

*kommutativ mit exakten Zeilen und seien in*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dash] & \mathfrak{A} \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "a"] & \mathfrak{B} \arrow[r, dash, "g"] \arrow[d, dash, dashed, "b"] & \mathfrak{C} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & \mathfrak{A}' \arrow[r, dash, "f'"'] & \mathfrak{B}' \arrow[r, dash, "g'"'] & \mathfrak{C}' \arrow[r, dash] & 0
\end{tikzcd}$$

*alle Komplexe projektive Auflösungen und alle Komplexhomomorphismen Fortsetzungen der R-Abbildungen, sowie beide Zeilen exakt. Dann gibt es einen Komplexhomomorphismus* $b\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$*, der eine Fortsetzung von* $q$ *ist und mit dem beide Quadrate kommutieren.*

*Beweis.* Wir konstruieren induktiv $b_n\colon B_n \longrightarrow B'_n$ mit Anfang $b_{-1} = q$. Bei $n = 0$ ist

$$\begin{tikzcd}
& A_0 \arrow[rr, dash, "f_0"] \arrow[dl, dash, "a_0"'] \arrow[dd, dash] & & B_0 \arrow[rr, dash, "g_0"] \arrow[dl, dash, dashed, "b_0"'] \arrow[dd, dash] & & C_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
A'_0 \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & B'_0 \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & C'_0 \arrow[dd, dash] & \\
& A \arrow[rr, dash] \arrow[dl, dash] & & B \arrow[rr, dash] \arrow[dl, dash] & & C \arrow[dl, dash] \\
A' \arrow[rr, dash] & & B' \arrow[rr, dash] & & C' &
\end{tikzcd}$$

aufzufüllen. Wie im Beweis zu (S1) hat man $\rho_0 f_0 = 1$, $g_0\sigma_0 = 1$ und $f_0\rho_0 + \sigma_0 g_0 = 1$, ebenso $\rho'_0$ und $\sigma'_0$. Mit einem geeigneten Homomorphismus $\psi_0\colon C_0 \longrightarrow A'_0$ (siehe unten) definieren wir $b_0 := f'_0 a_0 \rho_0 + \sigma'_0 c_0 g_0 + f'_0 \psi_0 g_0$, sodass $b_0 f_0 = f'_0 a_0$ und $g'_0 b_0 = c_0 g_0$ gilt, d.h. beide Deckel kommutieren. Die Folge

$$\begin{tikzcd}
A'_0 \arrow[r, dash] & B' \arrow[r, dash, "v'"] & C'
\end{tikzcd}$$

ist exakt und $v'(q\beta_0\sigma_0 - \beta'_0\sigma'_0 c_0) = r\gamma_0 - \gamma'_0 c_0 = 0$, also hat man ein $\psi_0$, so dass

$$\begin{tikzcd}
& C_0 \arrow[dl, dash, dashed, "\psi_0"'] \arrow[d, dash, "q\beta_0\sigma_0 - \beta'_0\sigma'_0 c_0"] & \\
A'_0 \arrow[r, dash] & B' \arrow[r, dash] & C'
\end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $u'\alpha_0'\psi_0 = q\beta_0\sigma_0 - \beta_0'\sigma_0'c_0$. Damit folgt $\beta_0'b_0 = q\beta_0$, d.h. auch die Zwischenwand kommutiert. Ebenso für $n > 0$. □

**Satz 2.**

(i) *Die verbinden Homomorphismus $\delta_n\colon L_nF(C) \longrightarrow L_{n-1}F(A)$ in (S1) sind unabhängig von der Wahl der Auflösung $\mathfrak{B}$.*

(ii) *Ist*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dash] & A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & A' \arrow[r, dash] & B' \arrow[r, dash] & C' \arrow[r, dash] & 0
\end{tikzcd}$$

*kommutativ mit exakten Zeilen, so ist auch*

$$\begin{tikzcd}
L_nF(C) \arrow[r, dash, "\delta_n"] \arrow[d, dash] & L_{n-1}F(A) \arrow[d, dash] \\
L_nF(C') \arrow[r, dash, "\delta_n'"] & L_{n-1}F(A')
\end{tikzcd}$$

*kommutativ.*

*Beweis.* Sei $\delta_n^*$ von $0 \longrightarrow \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \mathfrak{B}^* \longrightarrow \mathfrak{P}(C) \longrightarrow 0$ abgeleitet. Nach (L2) gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dash] & \mathfrak{P}(A) \arrow[r, dash] \arrow[d, equal] & \mathfrak{B} \arrow[r, dash] \arrow[d, dashed, dash] & \mathfrak{P}(C) \arrow[r, dash] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & \mathfrak{P}(A) \arrow[r, dash] & \mathfrak{B}^* \arrow[r, dash] & \mathfrak{P}(C) \arrow[r, dash] & 0,
\end{tikzcd}$$

so dass nach $(-)^{\sim}$, $F$ mit dem Zusatz der langen exakten Homologiefolge

$$\begin{tikzcd}
H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L_nF(C) \arrow[r, dash, "\delta_n"] \arrow[d, equal] & L_{n-1}F(A) \arrow[r, dash] \arrow[d, equal] & H_{n-1}F(\widetilde{\mathfrak{B}}) \arrow[d, dash] \\
H_nF(\widetilde{\mathfrak{B}^*}) \arrow[r, dash] & L_nF(C) \arrow[r, dash, "\delta_n^*"'] & L_{n-1}F(A) \arrow[r, dash] & H_{n-1}F(\widetilde{\mathfrak{B}^*}),
\end{tikzcd}$$

d.h. $\delta_n^* = \delta_n$. Der Rest des Satzes lässt sich genauso beweisen. □

Für jeden additiven kovarianten Funktor $F\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow T\text{-}\mathbf{Mod}$ definiert man dual die *$n$-te Rechtsableitung* $R^nF$ durch

$$R^nF(M) = H^nF\widetilde{\mathfrak{Q}}(M),$$

wobei

$$\mathfrak{Q}(M) = \ 0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^0(M) \longrightarrow Q^1(M) \longrightarrow \cdots$$

die kanonische injektive Auflösung von $M$ sei. Also ist $R^nF(M)$ der $n$-te Kohomologiemodul von

$$0 \longrightarrow FQ^0(M) \longrightarrow FQ^1(M) \longrightarrow FQ^2(M) \longrightarrow \cdots$$

Wie oben ist $R^0F$ linksexakt und man hat eine natürliche Transformation $\rho\colon F \longrightarrow R^0F$, die genau dann eine Äquivalenz ist, wenn $F$ linksexakt ist. Jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ induziert eine lange exakte Folge

$$0 \longrightarrow R^0F(A) \longrightarrow R^0F(B) \longrightarrow R^0F(C) \xrightarrow{\delta^1} R^1F(A) \longrightarrow \cdots$$

in der die verbindenden Homomorphismen $\delta^n$ wie in (S2) wohldefiniert und natürlich sind.

Sei $R$ ein Integritätsring und $M \in R$-**Mod**. Dann heißt

$$T(M) \coloneqq \{x \in M : rx = 0 \text{ für ein } 0 \neq r \in R\}$$

der *Torsionsuntermodul* von $M$. Es ist dann $\overline{M} = M/T(M)$ torsionsfrei im Sinne von (3,F1 zu S3), denn ist $r\overline{x} = 0$ und $r \neq 0$, so folgt $rx \in T(M)$, also existiert ein $s \neq 0$ mit $srx = 0$, also $\overline{x} = 0$. Ist $T(M) = M$, so heißt $M$ *torsion*.

**Beispiele.** Sei stets $R$ ein Integritätsring.

(i) Ist $U$ groß in $M$, so ist $M/U$ torsion, denn ist $x \notin U$, so folgt $Rx \cap U \neq 0$, etwa $0 \neq rx \in U$. Damit folgt $r \neq 0$ und $r\overline{x} = 0$ in $M/U$.

(ii) Es gilt $T(\coprod_i M_i) = \coprod_i T(M_i)$: "$\subset$" ist klar, denn $r(x_i) = 0$ impliziert $rx_i = 0$ für alle $i$. Bei "$\supset$" gilt für jedes $0 \neq x \in \coprod_i T(M_i)$, gibt es $r_i$ mit $r_i x_i = 0$ für alle $i$ und es sind fast alle $x_i = 0$. Also gibt es ein gemeinsames $r \neq 0$ mit $rx_i = 0$ für alle $i$, d.h. $rx = 0$. *Warnung*: über $R = \mathbb{Z}$ ist $T(\prod_p \mathbb{Z}/(p)) = \coprod_p \mathbb{Z}/(p)$.

(iii) Jeder flache $R$-Modul $M$ ist torsionsfrei, denn $0 \neq r \in R$ impliziert, dass $\widetilde{r}\colon R \hookrightarrow R$ injektiv ist. Also ist auch $1 \otimes \widetilde{r}\colon M \otimes R \hookrightarrow M \otimes R$ injektiv, aber es kommutiert

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R R \arrow[r, "1\otimes\widetilde{r}"] \arrow[d, "\wr"] & M \otimes_R R \arrow[d, "\wr"] \\ M \arrow[r, "\widetilde{r}"'] & M. \end{tikzcd}$$

(iv) Ist $M$ injektiv, so ist $T(M) \subset^{\oplus} M$. Nach (5,B3) hat man $T(M) \subset W_0 \subset^{\oplus} M$, wobei $T(M)$ groß in $W_0$ ist, und nach (B1) ist $W_0/T(M)$ torsion, also auch $W_0$ selbst. Damit folgt $T(M) = W_0$.

(v) Sei $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $M \in R$-**Mod**. Dann ist $K \otimes_R M$ als $R$-Modul torsionsfrei und teilbar (also nach (3,F1 zu S3) injektiv), und für die kanonische Abbildung $\mu\colon M \longrightarrow K \otimes_R M$ mit $\mu(x) = 1 \otimes x$ gilt $\ker \mu = T(M)$ und $\operatorname{coker} \mu \cong K/R \otimes_R M$, denn jedes $0 \neq r \in R$ operiert auf $K$ bijektiv, also auch auf $K \otimes_R M$, d.h. $K \otimes_R M$ ist als $R$-Modul torsionsfrei und teilbar. Aus der exakten Folge

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow K \longrightarrow K/R \longrightarrow 0$$

folgt

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"'] & K \otimes_R M \arrow[r] & K/R \otimes_R M \arrow[r] & 0, \\
M \arrow[ur, "\mu"'] & & &
\end{tikzcd}$$

d.h. die dritte Behauptung. Ist $x \in T(M)$, etwa $rx = 0$, so gilt $\mu(x) = 1 \otimes x = (1/r) \otimes rx = 0$. Ist $x \notin T(M)$, so ist $h_x\colon R \longrightarrow M$ mit $h_x(r) = rx$ injektiv, so dass es ein $f\colon M \longrightarrow K$ gibt mit $f(x) = 1$, denn $K$ ist injektiv als $R$-Modul. Dann bildet die Komposition

$$K \otimes_R M \xrightarrow{1 \otimes f} K \otimes_R K \longrightarrow K$$

$1 \otimes x$ ab auf 1, so dass $1 \otimes x \neq 0$ ist.
Es folgt, dass $K \otimes_R M = 0$ genau dann, wenn $M$ torsion ist, denn es ist $y \otimes x = (ry_1) \otimes x = y_1 \otimes (rx) = 0$ für $y \in K$, $x \in M$ und $r \neq 0$ mit $rx = 0$.

**Satz 3.** *Sei $R$ ein Integritätsring, $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $F\colon R$-**Mod** $\longrightarrow R$-**Mod** der Torsionsfunktor. Dann gilt $L_n F = 0$ für alle $n \geq 0$, $R^0 F \cong F$, $R^1 F \cong K/R \otimes_R -$ und $R^n F = 0$ für $n \geq 2$.*

*Beweis.* Der Funktor $F$ verschwindet auf allen projektiven $R$-Moduln, so dass alle Linksableitungen verschwinden. Der Funktor $F$ is linksexakt (so dass nach Bemerkung 3 $F \longrightarrow R^0 F$ eine Äquivalenz ist), denn mit jeder exakten Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

ist auch

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

exakt, denn $F(\alpha)$ ist mono und aus $b \in \ker F(\beta)$ folgt $b = \alpha(a)$, sogar $a \in F(A)$, also $b \in \operatorname{im} F(\alpha)$. Ist

$$\mathfrak{A} = \; 0 \longrightarrow M \longrightarrow A^0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow A^2 \longrightarrow \cdots$$

eine minimale injektive Auflösung von $M$, d.h. $\operatorname{im}\alpha^i$ ist groß in $A^i$, so sind nach (B1) $A^1$, $A^2$,… torsion, denn $A^0/\operatorname{im}\alpha^1$ ist torsion, also auch $A^1$, etc. Also ist

$$F(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \ 0 \longrightarrow F(A^0) \longrightarrow A^1 \longrightarrow A^2 \longrightarrow \cdots$$

so dass $R^nF = 0$ ist für alle $n \geq 2$. War $M$ torsion, ist auch $A_0$ torsion, also $R^1F(M) = 0$. Ist $M$ beliebig folgt mit $\overline{M} = M/T(M)$ die Exakheit von

$$0 = R^1F(T(M)) \longrightarrow R^1F(M) \longrightarrow R^1F(\overline{M}) \longrightarrow R^2F(T(M)) = 0,$$

und (B5) liefert die exakte Folge

$$0 = R^0F(K \otimes_R M) \longrightarrow R^0F(K/R \otimes_R M) \longrightarrow R^1F(\overline{M}) \longrightarrow R^1F(K \otimes_R M) = 0,$$

denn $K \otimes_R M$ ist injektiv. Zusammen folgt also

$$R^1F(M) \cong R^1F(\overline{M}) \cong R^0F(K/R \otimes_R M) \cong K/R \otimes_R M. \qquad \square$$

**Übung.** Sei $R$ ein Integritätsring und $A$ ein Torsionsmodul, $F = A \otimes_R -$. Dann sind alle $R^nF = 0$, $L_0F \cong F$ und alle $L_nF$ sind torsion für $n \geq 1$.

# VII. $\operatorname{Tor}_n^R(A,B)$

**Lemma 1.** *Für $A \in \textbf{\textit{Mod}}\text{-}R$ sind äquivalent:*

(i) *Der Modul $A$ ist flach.*

(ii) *Der duale Modul $A^+ := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in R\text{-}\textbf{\textit{Mod}}$ ist injektiv.*

(iii) *Für jedes Linksideal $I \subset {}_RR$ ist $A \otimes_R I \longrightarrow A \otimes_R R$ injektiv.*

*Beweis.* Die Eigenschaft $(iii)$ ist ein Spezialfall von $(i)$. Für $(iii \to ii)$ ist für jedes Ideal $I \subset {}_RR$ nach Voraussetzung $A \otimes_R I \longrightarrow A \otimes_R R$ mono, also existiert ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R I \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A \otimes_R R \arrow[dl, dashed, dash] \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \end{tikzcd}$$

denn $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist injektiv, und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist surjektiv, d.h. nach (2,S1) $\operatorname{Hom}_R(R, A^+) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{Hom}_R(I, A^+)$ surjektiv. Also ist nach dem Baehr'schen Kriterium $A^+$ injektiv.

Nun zu $(ii \to i)$. Für jeden Monomorphismus $\alpha \colon M \hookrightarrow N$ ist, weil $A^+$ injektiv ist, $\operatorname{Hom}_R(N, A^+) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A^+)$ surjektiv, also ist wieder der Homomorphismus $\dot{f} \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ surjektiv und der Homomorphismus $f = 1 \otimes \alpha : A \otimes_R M \longrightarrow A \otimes_R N$ injektiv:

Sei $0 \neq g \colon X \longrightarrow A \otimes_R M$. Dann gibt es einen Homomorphismus $\tau \colon A \otimes_R M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\tau \circ g \neq 0$, d.h. $0 \neq \dot{g} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Weil $\dot{f}$ epi ist, ist auch $\dot{g}\dot{f} \neq 0$, d.h. $fg \neq 0$. □

**Folgerung 1.** Ist $R$ ein Integritätsring und $A_R$ torsionsfrei und teilbar, so ist $A_R$ flach. Speziell ist stets $K = \operatorname{Quot}(R)$ flach über $R$.

*Beweis.* Jedes $0 \neq r \in R$ operiert auf $A$ bijektiv, d.h. $\widetilde{r} \colon A \longrightarrow A$ ist bijektiv, also auch auf $A^+ = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Also ist $A^+$ als $R$-Linksmodul injektiv und damit $A$ flach. □

**Folgerung 2.** Ist $R$ ein Hauptidealring, so stimmen die flachen $R$-Moduln mit den torsionsfreien $R$-Moduln überein. Speziell sind in diesem Fall Untermoduln flacher Moduln wieder flach.

*Beweis.* Jeder flache $R$-Modul ist torsionsfrei. Ist umgekehrt $A \in \textbf{Mod}\text{-}R$ torsionsfrei, so operiert jedes $0 \neq r \in R$ injektiv auf $A$, also surjektiv auf $A^+$, d.h. $A^+$ ist teilbar. Also ist, da $R$ ein Hauptidealring ist, $A^+$ injektiv, also $A$ flach. □

Zu jedem $A \in \textbf{Mod}\text{-}R$ und jedem $B \in R\text{-}\textbf{Mod}$ definiert man die abelschen Gruppen $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) := H_n(A \otimes_R \widetilde{\mathfrak{P}}(B))$ für $n \geq 0$, d.h. $\operatorname{Tor}_n^R(A,-)$ ist die $n$-te Linksableitung des additiven, kovarianten Funktors $A \otimes_R - \colon R\text{-}\textbf{Mod} \longrightarrow \textbf{Ab}$. Entsprechend sei $\overline{\operatorname{Tor}}_n^R(A,B) := H_n(\widetilde{\mathfrak{P}}(A) \otimes_R B)$.

**Satz 1.** *Es gilt* $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) \cong \overline{\operatorname{Tor}}_n^R(A,B)$.

*Beweis.* Für $n = 0$ ist das Tensorprodukt rechtsexakt, also gilt $\operatorname{Tor}_0^R(A,-) \cong A \otimes_R -$ bzw. $\overline{\operatorname{Tor}}_0^R(-,B) \cong - \otimes_R B$.

Sei nun $n = 1$. Ist

$$\mathfrak{P}(A) = \cdots \text{---} A_1 \text{---} A_0 \overset{\alpha_0}{\text{---}} A \text{---} 0$$

die kanonische projektive Auflösung von $A$ und

$$\mathfrak{P}(B) = \cdots \text{---} B_1 \text{---} B_0 \overset{\beta_0}{\text{---}} B \text{---} 0$$

die von $B$, so sind im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d, dash] & & 0 \arrow[d, dash] & \\
 & & \operatorname{Tor}_1^R(\ker\alpha_0, B) \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & \operatorname{Tor}_1^R(A,B) \arrow[d, dash] & \\
0 \arrow[r, dash] & \overline{\operatorname{Tor}}_1^R(A, \ker\beta_0) \arrow[r, dash] & \ker\alpha_0 \otimes_R \ker\beta_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A_0 \otimes_R \ker\beta_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A \otimes_R \ker\beta_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
 & 0 \arrow[r, dash] & \ker\alpha_0 \otimes_R B_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A_0 \otimes_R B_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A \otimes_R B_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & \overline{\operatorname{Tor}}_1^R(A,B) \arrow[r, dash] & \ker\alpha_0 \otimes_R B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A_0 \otimes_R B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A \otimes_R B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

alle Zeilen und Spalten exakt, die beiden kurzen, weil $A_0$ und $B_0$ flach sind, die vier langen, weil $L_1F(P) = 0$ ist für alle projektiven $P$. Das Schlangenlemma, angewandt auf den oberen Teil, liefert die exakte Folge

$$0 \text{---} \operatorname{Tor}_1^R(A,B) \text{---} \ker\alpha_0 \otimes_R B \overset{f}{\text{---}} A_0 \otimes_R B.$$

Aber $\ker f$ ist nach der untersten Zeile isomorph zu $\overline{\operatorname{Tor}}_1^R(A,B)$.

Sei nun $n > 1$. Wir zeigen durch Induktion über $n$ ein wenig mehr, nämlich dass $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) \cong \overline{\operatorname{Tor}}_n^R(A,B)$ und $\operatorname{Tor}_n^R(A, \ker\beta_0) \cong \operatorname{Tor}_n^R(\ker\alpha_0, B)$ für alle $A_R$, ${}_RB$. Klar ist der Fall $n = 1$, denn die zweite Aussage folgt aus obigem Diagramm. Bei

$n > 1$ hat man $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) \cong \operatorname{Tor}_{n-1}^R(A,\ker\beta_0)$ (siehe unten) und nach Induktion $\operatorname{Tor}_{n-1}^R(A,\ker\beta_0) \cong \overline{\operatorname{Tor}}_{n-1}^R(\ker\alpha_0,B) \cong \overline{\operatorname{Tor}}_n^R(A,B)$. Weiter hat man $\operatorname{Tor}_n^R(A,\ker\beta_0) \cong \operatorname{Tor}_{n-1}^R(A,\ker\beta_1) \cong \operatorname{Tor}_{n-1}^R(\ker\alpha_0,\ker\beta_0) \cong \operatorname{Tor}_n^R(\ker\alpha_0,B)$.

Noch zu der so genannten Dimensionverschiebung. Ist

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

exakt und $Y$ projektiv, so folgt aus

$$0 = L_nF(Y) \longrightarrow L_nF(Z) \longrightarrow L_{n-1}F(X) \longrightarrow L_{n-1}F(Y) = 0$$

für $n \geq 2$, dass $L_nF(Z) \cong L_{n-1}F(X)$. $\square$

**Zusatz.** Auch $\operatorname{Tor}_n^R(-,B)$ ist ein additiver kovarianter Funktor $\mathbf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbf{Ab}$, indem man für Morphismen $f\colon A \longrightarrow A'$ definiert $\operatorname{Tor}_n^R(f,B) := H_n(f \otimes 1_{\widetilde{\mathfrak{P}}(B)})$. Nach dem Satz sind dann $\operatorname{Tor}_n^R(-,B)$ natürlich äquivalent zu $\overline{\operatorname{Tor}}_n^R(-,B)$.

**Satz 2** (Eigenschaften von Tor)**.** *Sind $A \in \boldsymbol{Mod}\text{-}R$, $B \in R\text{-}\boldsymbol{Mod}$, so gilt:*

(i) *Es ist* $\operatorname{Tor}_0^R(A,B) \cong A \otimes_R B$.

(ii) *Zu jeder kurzen exakten Folge*

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

*in $R$-**Mod** hat man eine lange exakte Folge*

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(A,B'') \xrightarrow{\delta_2} \operatorname{Tor}_1^R(A,B') \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A,B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A,B'') \xrightarrow{\delta_1}$$
$$\xrightarrow{\delta_1} A \otimes_R B' \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B'' \longrightarrow 0$$

*in* $\mathbf{Ab}$ *mit den natürlichen verbindenden Homomorphismen $\delta_n$. Entsprechend mit*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0.$$

(iii) *Ist $A_R$ oder $_RB$ flach, so gilt* $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = 0$ *für alle $n \geq 1$*

(iv) *Ist $\mathfrak{B}$ eine flache Auflösung von $B$, so folgt* $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = H_n(A \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}})$ *für alle $n \geq 0$. Entsprechend mit $\mathfrak{A}$ eine flache Auflösung von $A$.*

(v) *Man hat* $\operatorname{Tor}_n^R(A,\coprod_{i\in I} B_i) \cong \coprod_{i\in I} \operatorname{Tor}_n^R(A,B_i)$ *für alle $n \geq 0$. Entsprechendes gilt für $\coprod_{i\in I} A_i$.*

*Beweis.* Die Aussage $(i)$ ist klar. In $(ii)$ ist das Erste klar mit $F = A \otimes_R -$ und der langen exakten Folge für linksabgeleitete Funktoren. Für das Zweite definiert man die verbindenden Homomorphismen $\partial_n$ durch

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^R(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Tor}_n^R(A'',B) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(A',B) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(A,B) \arrow[d, "\wr"] \\
\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(A,B) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(A'',B) \arrow[r, "\delta_n"'] & \overline{\mathrm{Tor}}_{n-1}^R(A',B) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Tor}}_{n-1}^R(A,B).
\end{tikzcd}$$

Für $(iii)$ sei $A_R$ flach. Dann ist $F = A \otimes -\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ exakt, also $L_n F = 0$ für alle $n \geq 1$. Analog ist für ${}_R B$ flach $\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(-,B) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Sei nun

$$\mathfrak{B} = \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_0 \arrow[r, "\beta_0"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

eine *flache Auflösung* von $B$, d.h. $\mathfrak{B}$ exakt und alle $B_i$ flach. Für $n = 0$ liefert die Rechtsexaktheit von $A \otimes_R -$ und

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R B_1 \arrow[r, "1_A \otimes \beta_1"] & A \otimes_R B_0 \arrow[r] \arrow[d, "1_A \otimes \beta_0"] & 0, \\
& A \otimes_R B &
\end{tikzcd}$$

dass $H_0(A \otimes_R \tilde{\mathfrak{B}}) = A \otimes_R B_0 / \ker(1 \otimes \beta_0) \cong A \otimes_R B$.

Nun zu $n = 1$. Mit einer exakten Folge

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit $Y$ flach ist im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \otimes_R B_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes_R B_1 \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_R B_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \otimes_R B_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes_R B_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_R B_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{X \otimes_R B}{U} \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes_R B \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_R B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

die mittlere Spalte und mit $U \coloneqq \ker(v \otimes 1_B)$ auch die unterste Zeile exakt. Die lange exakte Homologiefolge liefert

$$0 = H_1(Y \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) \longrightarrow H_1(A \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) \longrightarrow H_0(X \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) \longrightarrow H_0(Y \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) = 0,$$

also

$$H_1(A \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) \cong \frac{\ker(\nu \circ (1 \otimes \beta_0))}{\ker(1 \otimes \beta_0)} \cong \ker \nu = U,$$

wegen

$$0 = \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(Y, B) \longrightarrow \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(A, B) \longrightarrow X \otimes_R B \xrightarrow{u \otimes 1} Y \otimes_R B$$

also $U \cong \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(A, B)$. Für $n > 1$ liefert Induktion zusammen mit der langen exakten Homologiefolge, dass

$$H_n(A \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) \cong H_{n-1}(X \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}}) \cong \mathrm{Tor}_{n-1}^R(X, B) \cong \mathrm{Tor}_n^R(A, B).$$

In $(v)$ zeigen wir für $F = A \otimes_R -$ durch Induktion über $n$, dass

$$\omega_n \colon \coprod_{i \in I} L_n F(B_i) \longrightarrow L_n F\Big(\coprod_{i \in I} B_i\Big)$$

bijektiv ist. Für $n = 0$ vertauscht $L_0 F \cong F$ nach (2,S2) mit beliebigen Koprodukten. Sei $n = 1$. Wähle für jedes $i \in I$ ein exakte Folge

$$0 \longrightarrow X_i \longrightarrow Y_i \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$$

mit $Y_i$ flach, so dass auch

$$0 \longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} Y_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} B_i \longrightarrow 0$$

exakt ist und $\coprod_{i \in I} Y_i$ wieder flach ist. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 = \coprod_{i \in I} L_1 F(Y_i) \arrow[r] \arrow[d, dash] & \coprod_{i \in I} L_1 F(B_i) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_1"] & \coprod_{i \in I} L_0 F(X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \coprod_{i \in I} L_0 F(Y_i) \arrow[d, "\wr"] \\
0 = L_1 F\Big(\coprod_{i \in I} Y_i\Big) \arrow[r] & L_1 F\Big(\coprod_{i \in I} B_i\Big) \arrow[r] & L_0 F\Big(\coprod_{i \in I} X_i\Big) \arrow[r] & L_0 F\Big(\coprod_{i \in I} Y_i\Big)
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen ist dann $\omega_1$ injektiv, aber auch surjektiv, wie eine Diagrammjagd zeigt.

Für $n > 1$ ist

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} L_nF(B_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\omega_n"] & \coprod_{i\in I} L_{n-1}F(X_i) \arrow[d, "\wr"] \\
L_nF\Big(\coprod_{i\in I} B_i\Big) \arrow[r, "\sim"] & L_{n-1}F\Big(\coprod_{i\in I} B_i\Big)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, also $\omega_n$ ein Isomorphismus. □

**Folgerung 1.** Ist $R$ ein Hauptidealring, so gilt $\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = 0$ für alle $n \geq 2$.

*Beweis.* Mit

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

exakt und $Y$ flach ist nach (L1,F2) auch $X$ flach, also

$$0 = \operatorname{Tor}_n^R(A,Y) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A,B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{n-1}^R(A,X) = 0$$

exakt für $n \geq 2$. □

Für jeden $R$-Rechtsmodul $A_R \neq 0$ heißt

$$\operatorname{fd}(A) \coloneqq \inf\{\operatorname{len}(\mathfrak{A}) \colon \mathfrak{A} \text{ eine flache Auflösung von } A\}$$

die *flache Dimension* von $A$. Natürlich ist $\operatorname{fd}(A) \leq \operatorname{pd}(A)$. Ist $R$ ein Integritätsring mit $\operatorname{Quot}(R) = K \neq R$, so ist $\operatorname{fd}_R(K) = 0$, denn $K$ ist flach, aber $\operatorname{pd}_R(K) \neq 0$ (3,S2 da $K \subset^{\oplus} R^{(I)}$ unmöglich ist).

**Lemma 2.** *Für einen $R$-Rechtsmodul $A \neq 0$ und $n \geq 0$ sind äquivalent:*
(i) *Es gilt* $\operatorname{fd}(A) \leq n$.
(ii) *Für alle $k \geq n+1$ und $B \in R$-**Mod** ist* $\operatorname{Tor}_k^R(A,B) = 0$.
(iii) *Für alle Linksideal $I \subset {}_RR$ ist* $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(A, R/I) = 0$.
(iv) *In jeder flachen Auflösung*

$$\mathfrak{A} = \;\cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0$$

*ist* im $\alpha_n$ *flach.*

*Beweis.* Für $(i \to ii)$ gibt es nach Voraussetzung eine flache Auflösung

$$\mathfrak{A} = \;\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

so dass nach (S2,iv) $\operatorname{Tor}_k^R(A,B) \cong H_k(\widetilde{\mathfrak{A}} \otimes_R B) = 0$ für alle $k > n$ und alle $B \in R$-**Mod**. Die Richtung $(ii \to iii)$ ist ein Spezialfall.

In $(iii \to iv)$ gilt für jedes Linksideal $I \subset {}_R R$, dass

$$\operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{im}\alpha_n, R/I) \cong \operatorname{Tor}_2^R(\operatorname{im}\alpha_{n-1}, R/I) \cong \ldots \cong \operatorname{Tor}_{n+1}^R(A, R/I) = 0$$

nach Dimensionsverschiebung. Nun ist

$$0 = \operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{im}\alpha_n, R/I) \longrightarrow \operatorname{im}\alpha_n \otimes_R I \longrightarrow \operatorname{im}\alpha_n \otimes_R R$$

exakt, also $\operatorname{im}\alpha_n$ nach (L1) flach.

In $(iv \to i)$ ist mit irgendeiner flachen Auflösung

$$\mathfrak{A} = \ \cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0$$

von $A$ ist nach Voraussetzung $\operatorname{im}\alpha_n$ flach, also auch

$$\mathfrak{A}' = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{im}\alpha_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

eine flache Auflösung von $A$. $\square$

**Satz 3.** *Sei $R$ rechtsnoethersch und $A_R \neq 0$ endlich erzeugt. Dann ist* $\operatorname{fd}(A) = \operatorname{pd}(A)$. *Speziell ist jeder endlich erzeugte flache $R$-Rechtsmodul bereits projektiv.*

*Beweis.* Ist $R$ beliebig und $M_R$ frei, $M/U$ flach und $U$ endlich erzeugt, so ist $U \subset^{\oplus} M$. Zu jedem $x \in U$ gibt es nämlich einen Endomorphismus $f\colon M \longrightarrow M$ mit $\operatorname{im} f \subset U$ und $f(x) = x$: Für $x = 0$ ist das klar und für $x \neq 0$ sei $x = \sum_{i=1}^m b_i r_i$ mit $b_i$ aus einer Basis $B \subset M$. Dann gilt für das Linksideal $I = \sum_{i=1}^m R r_i$, dass $x \in U \cap MI$ ist. Außerdem ist

$$0 = \operatorname{Tor}_1^R(M/U, R/I) \longrightarrow U \otimes_R R/I \longrightarrow M \otimes_R R/I$$

exakt, d.h. $U/UI \hookrightarrow M/MI$, also $U \cap UI = UI$. Damit ist $x \in UI$, also $x = \sum_{i=1}^m u_i r_i$ mit $u_i \in U$. Damit leistet $f\colon M \longrightarrow M$ mit $f(b_i) := u_i$ für $1 \leq i \leq m$ und $f(b) = 0$ für alle anderen $b \in B$ das Gewünschte: $\operatorname{im} f \subset U$ ist klar, ebenso $f(x) = \sum_{i=1}^m f(b_i) r_i = \sum_{i=1}^m u_i r_i = x$.

Sogar für endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in U$ gibt es ein $f\colon M \longrightarrow M$ mit $\operatorname{im} f \subset U$ und $f(x_\nu) = x_\nu$ für $1 \leq \nu \leq n$: Bei $n > 1$ hat man induktiv $(1-g)(x_\nu) = 0$ für alle $1 \leq \nu < n$ und $\operatorname{im} g \subset U$. Wegen $(1-g)(x_n) \in U$ hat man auch ein $h\colon M \longrightarrow M$ mit $\operatorname{im} h \subset U$ und $(1-h)(1-g)(x_n) = 0$ und dann leistet $f := g + h - hg$ das Gewünschte.

War nun $U = \sum_{\nu=1}^n x_\nu R$, folgt wegen $f(u) = u$ für alle $u \in U$, dass $U \hookrightarrow M$ das Linksinverse $f\colon M \longrightarrow U$ hat.

Sei jetzt $R_R$ noethersch und $A_R$ endlich erzeugt. Dann kann man eine exakte Folge

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr] & & A_0 \arrow[r, "\alpha_0"] & A \arrow[r] & 0 \\ & & \ker\alpha_0 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

wählen, in der alle Objekte $A_i$ endlich erzeugt und für $i \geq 0$ frei sind. Wegen $\mathrm{fd}(A) = n$ ist $\operatorname{im} \alpha_n$ flach, d.h. $A_n/\ker \alpha_n$ flach. Nach dem 1. Schritt ist dann $\ker \alpha_n \subset^{\oplus} A_n$ und es ist $A_n/\ker \alpha_n \cong \operatorname{im} \alpha_n$ projektiv, also $\mathrm{pd}(A) \leq n$. $\square$

Ist $R$ kommutativ, so wird $F = A \otimes_R -$ ein Funktor $R$-**Mod** $\longrightarrow$ $R$-**Mod** und ebenso die Linksableitungen $L_n F = \mathrm{Tor}_n^R(A, -)$. Entsprechend $\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(-, B)$ und der Isomorphismus

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \xrightarrow{\ \sim\ } \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(A, B)$$

aus (S1) ist dann auch $R$-linear.

**Lemma 3.** *Ist $R$ kommutativ, so gilt*

(i) $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong \mathrm{Tor}_n^R(B, A)$ *für alle $n \geq 0$.*

(ii) *Ist $f\colon A \longrightarrow A$ die Multiplikation mit einem $r \in R$, so ist auch die induzierte Abbildung $f_*\colon$ $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ die Multiplikation mit $r \in R$. Speziell impliziert $rA = 0$, dass $r\,\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0$.*

(iii) *Ist $R$ ein Integritätsring, so ist $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ torsion für alle $n \geq 1$.*

*Beweis.* Sei

$$\mathfrak{B} = \ \cdots \text{——} B_1 \text{——} B_0 \text{——} B \text{——} 0$$

die kanonische projektive Auflösung von $B$. Für jedes $n \geq 0$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} A \times B_n &\text{——} B_n \otimes_R A \\ (a, b) &\longmapsto b \otimes a \end{aligned}$$

tensoriell, induziert also einen $\mathbb{Z}$-Homomorphismus, $f_n\colon A \otimes_R B_n \longrightarrow B_n \otimes_R A$, der sogar ein $R$-Isomorphismus ist. Damit ist $f = (\ldots, f_1, f_0, 0)\colon A \otimes_R \widetilde{\mathfrak{B}} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{B}} \otimes_R A$ ein Komplexisomorphismus über $R$ und $H_n(f)\colon$ $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \longrightarrow \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(B, A)$ ein $R$-Isomorphismus, wie gewünscht.

Nach Definition ist $f_* = H_n(\widetilde{r} \otimes 1_{\widetilde{\mathfrak{B}}})$ mit

$$\begin{array}{ccccccc}
A \otimes_R \mathfrak{B} = \cdots & \text{——} & A \otimes_R B_1 & \text{——} & A \otimes_R B_0 & \text{——} & 0 \\
{\scriptstyle \widetilde{r} \otimes 1_{\widetilde{\mathfrak{B}}}} \Big| & & \Big| {\scriptstyle \widetilde{r}} & & \Big| {\scriptstyle \widetilde{r}} & & \\
A \otimes_R \mathfrak{B} = \cdots & \text{——} & A \otimes_R B_1 & \text{——} & A \otimes_R B_0 & \text{——} & 0
\end{array}$$

also $f_* = \widetilde{r}$.

Sei jetzt $R$ ein Integritätsring. Ist $X$ ein Torsionsmodul, so auch $X \otimes_R Y$ für alle $Y \in R$-**Mod**, insbesondere alle $\mathrm{Tor}_n^R(X, B) = H_n(X \otimes_R \widetilde{\mathfrak{P}}(B))$ für $n \geq 0$. Ist $A$ beliebig, so hat man nach (6,B5) mit $K = \mathrm{Quot}(R)$ die exakte Folge

$$0 \text{——} A/T(A) \text{——} K \otimes_R A \text{——} K/R \otimes_R A \text{——} 0,$$

so dass wegen $K \otimes_R A$ torsionsfrei und teilbar die Folge

$$\operatorname{Tor}_{n+1}^R(K/R \otimes_R A, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A/T(A), B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(K \otimes_R A, B) = 0$$

exakt ist, also wegen $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(K/R \otimes_R A, B)$ torsion auch $\operatorname{Tor}_n^R(A/T(A), B)$ torsion ist. Aus

$$\operatorname{Tor}_n^R(T(A), B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A/T(A), B)$$

folgt die Behauptung. □

**Beispiel 1.** Ist $R$ ein Integritätring mit Quotientenkörper $K$, so gilt für $B \in R$-**Mod**, dass $\operatorname{Tor}_1^R(K/R, B) \cong T(B)$ und $\operatorname{Tor}_n^R(K/R, B) = 0$ für alle $n \geq 2$.

*Beweis.* Es ist exakt

$$\operatorname{Tor}_1^R(K, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(K/R, B) \longrightarrow R \otimes_R B \longrightarrow K \otimes_R B.$$

Nun ist $K$ flach und $\operatorname{Tor}_1^R(K/R, B) \cong \ker(R \otimes_R B \longrightarrow K \otimes_R B) \cong T(B)$ nach (6,B5). □

**Beispiel 2.** Ist $r \in R$ kein Nullteiler, so gilt

$$\operatorname{Tor}_n^R(R/(r), B) \cong \begin{cases} B/rB & n = 0 \\ \operatorname{Ann}_B(r) & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

*Beweis.* Die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\widetilde{r}} R \xrightarrow{\nu} R/(r) \longrightarrow 0$$

liefert die exakte Folge

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(R, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(R, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(R/(r), B) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(R, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(R, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(R/(r), B) \longrightarrow \\ \longrightarrow B \longrightarrow B \longrightarrow R/(r) \otimes_R B \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit folgt sofort die Behauptung. □

# **VIII.** $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$

Statt des Tensorproduktes soll jetzt der Hom-Funktor abgeleitet werden. Zu Moduln $A, C \in R$-**Mod** und $n \geq 0$ definiert man die abelschen Gruppen

$$\mathrm{Ext}_R^n(C,A) = H^n \,\mathrm{Hom}_R(C, \widetilde{\mathfrak{Q}}(A)),$$

worin

$$\mathfrak{Q} = \; 0 \longrightarrow A \longrightarrow A^0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow \cdots$$

die kanonische injektive Auflösung von $A$ sei und $\mathrm{Hom}_R(C, \widetilde{\mathfrak{Q}}(A))$ der Kokomplex

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, A^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, A^1) \longrightarrow \cdots$$

sei, d.h. $\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$ ist die $n$-te Rechtsableitung des additiven kovarianten Funktors $\mathrm{Hom}_R(C,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$. Entsprechend sei

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(C,A) = H^n \,\mathrm{Hom}_R(\widetilde{\mathfrak{P}}(C), A)$$

mit der kanonischen projektiven Auflösung $\mathfrak{P}(C)$ von $C$. Dann gilt wie in (7,S1):

**Satz 1.** *Es ist* $\mathrm{Ext}_R^n(C,A) \cong \overline{\mathrm{Ext}}_R^n(C,A)$.

**Satz 2** (Eigenschaften von Ext)**.** *Sind* $A, C \in R$-***Mod****, so gilt:*
(i) $\mathrm{Ext}_R^0(C,A) \cong \mathrm{Hom}_R(C,A)$.
(ii) *Zu jeder kurzen exakten Folge*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

*in* $R$-***Mod*** *hat man eine lange exakte Folge*

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,A'') \xrightarrow{\delta^1} \\
\xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Ext}_R^1(C,A') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C,A'') \xrightarrow{\delta^2} \\
\xrightarrow{\delta^2} \mathrm{Ext}_R^2(C,A') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(C,A'') \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

*in* **Ab***. Zu jeder kurzen exakten Folge*

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

*in $R$-**Mod** hat man entsprechend eine lange exakte Folge*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C'',A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C',A) \xrightarrow{\partial^1} \\ \xrightarrow{\partial^1} \operatorname{Ext}^1_R(C'',A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(C',A) \xrightarrow{\partial^2} \\ \xrightarrow{\partial^2} \operatorname{Ext}^2_R(C'',A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(C',A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

*in* **Ab**.

(iii) *Ist $C$ projektiv oder $A$ injektiv, folgt* $\operatorname{Ext}^n_R(C,A) = 0$ *für* $n \geq 1$.

(iv) *Ist $\mathfrak{A}$ eine injektive Auflösung $A$, folgt* $\operatorname{Ext}^n_R(C,A) \cong H^n \operatorname{Hom}_R(C,\widetilde{\mathfrak{A}})$ *für alle* $n \geq 0$. *Entsprechend mit einer projektiven Auflösung $\mathfrak{C}$ von $C$.*

(v) *Es ist*

$$\operatorname{Ext}^n_R\Big(C, \prod_{i\in I} A_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}^n_R(C, A_i)$$

*und*

$$\operatorname{Ext}^n_R\Big(\coprod_{i\in I} C_i, A\Big) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}^n_R(C_i, A).$$

*Beweis.* Bei (i) ist $F = \operatorname{Hom}_R(C,-)$ linksexakt, also $R^0F \cong F$. Bei (ii) entsteht die erste lange Folge wie in (6), die zweite mit

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ext}^{n-1}_R(C',A) \arrow[r, dashed, "\partial^n"] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{Ext}^n_R(C'',A) \arrow[d, "\wr"] \\ \overline{\operatorname{Ext}}^{n-1}_R(C',A) \arrow[r, "\delta^n"'] & \overline{\operatorname{Ext}}^n_R(C'',A) \end{tikzcd}$$

Bei (iii) ist für ${}_RA$ injektiv der Funktor $G = \operatorname{Hom}_R(-,A)$ exakt, also alle Rechtsableitungen $R^nG = \overline{\operatorname{Ext}}^n_R(-,A) = 0$ für alle $n \geq 1$. Ist ${}_RC$ projektiv, so ist $F = \operatorname{Hom}_R(C,-)$ exakt, also alle $R^nF = \operatorname{Ext}^n_R(C,-) = 0$ für $n \geq 1$. Die Aussage (iv) beweist man wie in (7,S2).

Schließlich vertauscht $F = \operatorname{Hom}_R(C,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ mit direkten Produkten, also auch $R^0F \cong F$, also auch $R^nF$ für $n \geq 1$; das folgt wie in (7,S2) mit

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow Y_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow 0$$

und $Y_i$ injektiv.

Der Funktor $G = \operatorname{Hom}_R(-,A)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ verwandelt Koprodukte in Produkte:

$$\begin{array}{rcl} \omega\colon \operatorname{Hom}_R\Big(\coprod_{i\in I} C_i, A\Big) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(C_i, A) \\ g & \longmapsto & (g\varepsilon_i)_{i\in I} \end{array}$$

mit den kanonischen Injektiven $\varepsilon_i\colon C_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} C_i$. Also tut dies auch $R^0G \cong G$ und damit auch alle $R^nG$ für $n \geq 1$. $\square$

**Folgerung.** Ist $R$ ein Hauptidealring, gilt $\operatorname{Ext}_R^n(C, A) = 0$ für alle $n \geq 2$.

*Beweis.* Sei

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

exakt mit $Y$ injektiv. Weil $Z$ teilbar, also nach (3,F2 zu S3) sogar injektiv ist, folgt aus

$$0 = \operatorname{Ext}_R^{n-1}(C, Z) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n(C, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n(C, Y) = 0$$

für alle $n \geq 2$ die Behauptung. $\square$

**Lemma 1.** *Es ist genau dann* $\operatorname{Ext}_R^1(C, A) = 0$*, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

*zerfällt.*

*Beweis.* Sei zuerst $\operatorname{Ext}_R^1(C, A) = 0$. Dann ist

$$\operatorname{Hom}_R(C, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(C, A) = 0$$

exakt und es folgt $1_C = \beta_*(\sigma) = \beta\sigma$ mit $\sigma\colon C \longrightarrow B$.

Sei umgekehrt

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$$

exakt und $Y$ injektiv. Es folgt, dass $v_*\colon \operatorname{Hom}_R(C, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, Z)$ surjektiv ist, denn sei $f \in \operatorname{Hom}_R(C, Z)$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

worin das zweite Quadrat ein Faserprodukt ist und $\alpha(a) = (u(a), c)$. Nach Voraussetzung gilt $v'\sigma = 1_C$ für ein $\sigma\colon C \longrightarrow B$. Dann ist $f'\sigma$ ein Urbild von $f$. Damit folgt aus

$$\operatorname{Hom}_R(C, Y) \xrightarrow{v_*} \operatorname{Hom}_R(C, Z) \xrightarrow{0} \operatorname{Ext}_R^1(C, A) \longrightarrow 0$$

die Behauptung. $\square$

**Bemerkung.** Seien $A, C \in R$-**Mod**. Eine *Erweiterung* von $A$ durch $C$ ist eine kurze exakte Folge

$$E = \ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

und $E_1$ heißt *äquivalent* zu $E_2$, in Zeichen $E_1 \equiv E_2$, wenn es einen Homomorphismus $\varphi\colon B_1 \longrightarrow B_2$ gibt mit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativ. Nach dem Schlangenlemma ist $\varphi$ ein Isomorphismus, mit $\varphi^{-1}\colon B_2 \longrightarrow B_1$, also auch $E_2 \equiv E_1$. Klar ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation und die Menge aller Äquivalenzklassen von Erweiterungen von $A$ durch $C$ wird mit $\mathrm{e}(C, A)$ bezeichnet. Auf ihr kann man eine abelsche Gruppenstruktur $[E_1] + [E_2]$ definieren, die so genannte *Baer'sche Addition*, und dann gibt es einen Gruppenisomorphismus $\omega\colon \operatorname{Ext}^1_R(C, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{e}(C, A)$ mit $\omega(0)$ die Äquivalenzklasse der zerfallenden Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} A \times C \xrightarrow{p_2} C \longrightarrow 0.$$

**Lemma 2.** *Für* ${}_RA \neq 0$ *und* $n \geq 0$ *sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{id}(A) \leq n$.

(ii) $\operatorname{Ext}^k_R(C, A) = 0$ *für alle* $k \geq n+1$ *und alle* ${}_RC$.

(iii) $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, A) = 0$ *für alle Linksideale* $I \subset {}_RR$.

(iv) *In jeder injektiven Auflösung*

$$\mathfrak{A} = \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha^0} A^0 \xrightarrow{\alpha^1} A^1 \xrightarrow{\alpha^2} \cdots$$

*ist* $\operatorname{im} \alpha^n$ *injektiv.*

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i) und (iv) ist klar, ebenso (i→ii) und (ii→iii). Es bleibt also (iii→iv). Aus $\mathfrak{A}$ wie angegeben folgt

$$\operatorname{Ext}^1_R(R/I, \operatorname{im} \alpha^n) \cong \operatorname{Ext}^2_R(R/I, \operatorname{im} \alpha^{n-1}) \cong \ldots \cong \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, A) = 0.$$

Damit folgt die Behauptung, denn für alle Linksideale $I \subset {}_RR$ ist

$$\operatorname{Hom}_R(R, \operatorname{im} \alpha^n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(I, \operatorname{im} \alpha^n) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(R/I, \operatorname{im} \alpha^n)$$

exakt, d.h.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & R \arrow[dl, dashed, dash] \\ \operatorname{im}\alpha^n & \end{tikzcd}$$

und nach dem Baer'schen Kriterium ist $\operatorname{im}\alpha^n$ injektiv. $\square$

**Bemerkung.** Im projektiven Fall gelten für ${}_RC \neq 0$ und alle $n \geq 0$ die entsprechenden Äquivalenzen

(i) $\mathrm{pd}(A) \leq n$.
(ii) $\mathrm{Ext}^k_R(C, A) = 0$ für alle $k \geq n+1$ und alle ${}_RA$.
(iv) In jeder projektiven Auflösung

$$\mathfrak{C} = \ \cdots \xrightarrow{\alpha_2} C_1 \xrightarrow{\alpha_1} C_0 \xrightarrow{\alpha_0} C \longrightarrow 0$$

von $C$ ist $\operatorname{im}\alpha_n$ projektiv.

Aber es gibt keine zu (iii) duale Aussage: Aus $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C, A) = 0$ für alle "kozyklischen" $\mathbb{Z}$–Moduln $A$ folgt nicht, dass $C$ projektiv ist. Zum Beispiel hat man $\mathbb{Q}$. Auch für die Voraussetzung "artinsch" statt "kozyklisch" gibt es Gegenbeispiele.

Unter dem Zusatzaxiom $V = L$, d.h. alle Mengen sind konstruierbar, zu ZFC folgt aus $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}) = 0$, dass $C$ projektiv ist. Unter der Negation der Kontinuumshypothese und Martins Axiom gibt es $\mathbb{Z}$–Moduln $C$ mit $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}) = 0$, die nicht projektiv sind.

**Folgerung 1.** Für $n \geq 0$ sind äquivalent:

(i) $\mathrm{id}(A) \leq n$ für alle ${}_RA \neq 0$.
(ii) $\mathrm{pd}(C) \leq n$ für alle ${}_RC \neq 0$.
(iii) $\mathrm{pd}(R/I) \leq n$ für alle Linksideale $I \subsetneq {}_RR$.

Falls $R$ rechtsnoethersch ist, folgt aus diesen äquivalenten Bedingungen auch $\mathrm{pd}(M) \leq n$ für alle $M_R \neq 0$.

*Beweis.* Sei zuerst (i) angenommen. Dann ist nach (L2) $\mathrm{Ext}^k_R(C, A) = 0$ für alle $k \geq n+1$ und alle ${}_RA$, ${}_RC$, d.h. die projektive Dimension $\mathrm{pd}(C) \leq n$ für alle ${}_RC \neq 0$. Die Richtung (ii→iii) ist klar und bei (iii→i) ist $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/I, A) = 0$ für alle $I \subset {}_RR$ und alle Linksmoduln ${}_RA$. Nach (L2) ist also $\mathrm{id}(A) \leq n$ für alle ${}_RA$.

Für den Zusatz folgt aus (ii), dass $\mathrm{fd}(C) \leq n$ für alle ${}_RC \neq 0$, d.h. nach (7,L2) $\mathrm{fd}(B) \leq n$ für alle $B_R \neq 0$, denn betrachte $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(B, C)$. Nach (7,S3) folgt $\mathrm{pd}(B) = \mathrm{fd}(B) \leq n$ für alle endlich erzeugten Rechtsmoduln $B_R \neq 0$. Wegen noethersch ist also $\mathrm{pd}(M) \leq n$ für alle $M_R \neq 0$. $\square$

Ist $R$ kommutativ, wird $\mathrm{Hom}_R(C, \widetilde{\mathfrak{Q}}(A))$ zu einem $R$-Kokomplex durch die Operation $(r.f)(c) = rf(c) = f(rc)$, so dass alle $\mathrm{Ext}^n_R(C, A)$ sogar $R$-Moduln sind. Ist $f\colon A \longrightarrow A$

die Multiplikation mit $r \in R$, so ist auch $f_*\colon \operatorname{Ext}_R^n(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n(C,A)$ die Multiplikation mit $r$ wie in (7,L3). Ist analog $g\colon C \longrightarrow C$ die Multiplikation mit $r$, so auch $g^*\colon \operatorname{Ext}_R^n(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n(C,A)$. Ist speziell $rA = 0$ oder $rC = 0$, so folgt $r\operatorname{Ext}_R^n(C,A) = 0$.

**Beispiel 1.** Ist $R$ ein Integritätsring mit $K = \operatorname{Quot}(R)$ und ${}_RA$ torsionsfrei und ${}_RC$ torsion, so gilt $\operatorname{Ext}_R^1(C,A) \cong \operatorname{Hom}_R(C, K/R \otimes_R A)$.

In der Tat ist

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow K \otimes_R A \longrightarrow K/R \otimes_R A \longrightarrow 0$$

exakt nach (6,B5), weil $A$ torsionsfrei ist, also auch

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, K/R \otimes_R A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(C,A) \longrightarrow 0,$$

denn es ist $\operatorname{Ext}_R^1(C, K \otimes_R A) = 0$, weil $K \otimes_R A$ torsionsfrei und teilbar, insbesondere injektiv ist, und $\operatorname{Hom}_R(C, K \otimes_R A) = 0$, weil $K \otimes_R A$ torsionsfrei ist.

**Beispiel 2.** Für jeden Nichtnullteiler $r \in R$ gilt

$$\operatorname{Ext}_R^n(R/(r), A) = \begin{cases} \operatorname{Ann}_A(r) & n = 0 \\ A/rA & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

In der Tat ist

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\widetilde{r}} R \xrightarrow{\nu} R/(r) \longrightarrow 0$$

exakt, wenn $r$ kein Nullteiler ist, und man erhält die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R/(r), A) \longrightarrow A \xrightarrow{\widetilde{r}} A \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(R/(r), A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(R, A) = 0$$

also $\operatorname{Hom}_R(R/(r), A) \cong \ker(\widetilde{r}) = \operatorname{Ann}_r(A)$, und $\operatorname{Ext}_R^1(R/(r), A) \cong A/rA$.

**Beispiel 3.** Ist $R$ ein Hauptidealring und $A$ beschränkt, d.h. $rA = 0$ für ein $0 \neq r \in R$, und $C$ torsionsfrei, so gilt $\operatorname{Ext}_R^1(C,A) = 0$.

In der Tat ist

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\widetilde{r}} C \xrightarrow{\nu} C/rC \longrightarrow 0$$

exakt, also auch

$$\operatorname{Ext}_R^1(C/rC, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(C,A) \xrightarrow{\widetilde{r}} \operatorname{Ext}_R^1(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(C/rC, A) = 0.$$

Aber $r$ annulliert $A$, also ist $\widetilde{r}\colon \operatorname{Ext}^1_R(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(C,A)$ die Nullabbildung, die surjektiv ist wegen $\operatorname{Ext}^2_R(C/rC,A)=0$. Also ist $\operatorname{Ext}^1_R(C,A)=0$.

Wir haben gezeigt, dass für einen Hauptidealring $R$ und einen beschränkten Untermodul $U$ von $M$, für den $M/U$ torsionsfrei ist, schon $U \subset^{\oplus} M$ folgt.

**Lemma 3.** *Seien $R$ kommutativ, $A, C \in R$-**Mod** und $x_1,\dots,x_n \in \operatorname{Ann}_R(C)$ Ringelemente, so dass $x_1$ ein Nichtnullteiler bezüglich $A$ ist, $x_2$ ein Nichtnullteiler bezüglich $A/x_1A$, allgemeiner $x_i$ ein Nichtnullteiler bezüglich $A/(x_1,\dots,x_{i-1})A$ ist. Dann gilt $\operatorname{Ext}^i_R(C,A)=0$ für $i<n$ und $\operatorname{Ext}^n_R(C,A) \cong \operatorname{Hom}_R(C, A/(x_1,\dots,x_n)A)$.*

*Beweis.* Sei zuerst $n=1$. Dann ist $\operatorname{Hom}_R(C,A)=0$, denn sei $f\colon C \longrightarrow A$ ein $R$–Homomorphismus und $c \in C$. Dann ist $x_1 f(c) = f(x_1 c) = 0$, also $f(c)=0$, wegen den Voraussetzungen über $x_1$. Aus der Exaktheit von

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x_1} A \longrightarrow A/x_1A \longrightarrow 0$$

folgt die Exaktheit von

$$0 = \operatorname{Hom}_R(C,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,A/x_1A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(C,A) \xrightarrow{x_1} \operatorname{Ext}^1_R(C,A).$$

Aber $x_1 \in \operatorname{Ann}_R(C)$, also ist $x_1\colon \operatorname{Ext}^1_R(C,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(C,A)$ die Nullabbildung, also folgt $\operatorname{Ext}^1_R(C,A) \cong \operatorname{Hom}_R(C,A/x_1A)$.

Sei nun $n>1$. Dann gilt nach Induktion $\operatorname{Ext}^i_R(C,A)=0$ für alle $i<n-1$ und $\operatorname{Ext}^{n-1}_R(C,A) \cong \operatorname{Hom}_R(C,A')$ mit $A' = A/(x_1,\dots,x_{n-1})A$. Nach Voraussetzung ist auch $x_n \in \operatorname{Ann}_R(C)$ ein Nichtnullteiler bezüglich $A'$, also folgt wie im Fall $n=1$, dass $\operatorname{Hom}_R(C,A')=0$. Mit $A''=A/x_1A$ folgt wieder nach Induktion, dass $\operatorname{Ext}^{n-1}_R(C,A'') \cong \operatorname{Hom}_R(C,A/(x_1,\dots,x_n)A)$ und aus der exakten Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x_1} A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

folgt $\operatorname{Ext}^n_R(C,A) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_R(C,A'')$, weil Multiplikation mit $x_1$ auf $\operatorname{Ext}^n_R(C,A)$ die Nullabbildung induziert. □

**Bemerkung.** Ist $k$ ein Körper und $R = k[X_1,\dots,X_n]$, so folgt

$$\operatorname{Ext}^i_R(k,R) = \begin{cases} 0 & i<n \\ k & i=n \end{cases}$$

In der Tat folgt mit $\mathfrak{m} = (X_1,\dots,X_n)$, dass $R/\mathfrak{m} \cong k$ und $X_1,\dots,X_n \in \operatorname{Ann}_R(R/\mathfrak{m})$. Klar ist $X_1$ ein Nichtnullteiler bezüglich $R$, $X_2$ ein Nichtnullteiler bezüglich $R/(X_1) \cong k[X_2,\dots,X_n]$ und so weiter. Aus (L3) folgt dann die Behauptung.

# IX. $M$–reguläre Folgen

Sei ab jetzt $R$ stets kommutativ. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt *assoziiert* zu einem $R$–Modul $M$, wenn es ein $u \in M$ gibt mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(u)$, und $\mathrm{Ass}_R(M)$ sei die Menge aller zu $M$ assoziierten Primideale.

**Beispiele.**
(i) Sei $R$ ein Integritätsring und $M \neq 0$ torsionsfrei. Dann ist $\mathrm{Ass}(M) = \{0\}$, denn ist $0 \neq u \in M$, so ist $\mathrm{Ann}_R(u) = 0$.
(ii) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $R$, so ist $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.
(iii) Für $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{(p) \colon p \text{ prim}\}$, denn $0 \notin \mathrm{Ass}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist klar und $(p) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\overline{1/p})$.

**Lemma 1.**
(i) *Aus* $U \subset M$ *folgt* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(U) \cup \mathrm{Ass}(M/U)$*.*
(ii) *Aus* $U \subset^{\oplus} M$ *folgt* $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(U) \cup \mathrm{Ass}(M/U)$*.*
(iii) *Ist $U$ groß in $M$, so ist* $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(U)$*.*

*Beweis.*
(i) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, also $R/\mathfrak{p} \cong M_1 \subset M$. Falls $M_1 \cap U \neq 0$, folgt für ein beliebiges $0 \neq u \in M_1 \cap U$ nach (B2), dass $\mathrm{Ann}_R(u) = \mathfrak{p}$ ist, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(U)$. Falls $M_1 \cap U = 0$, ist $M_1 \hookrightarrow M/U$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/U)$.
(ii) Aus $V \oplus U = M$ folgt $V \cong M/U$, also $\mathrm{Ass}(M/U) = \mathrm{Ass}(V) \subset \mathrm{Ass}(M)$.
(iii) Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, also $R/\mathfrak{p} \cong M_1 \subset M$ wie oben, so folgt $M_1 \cap U \neq 0$ nach der Definition von "groß" in (5), also wie in (i) bereits $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(U)$.

$\square$

**Folgerung.** Ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, so ist $\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}(M_i)$.

*Beweis.* Natürlich ist $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}(M_i) \subset \mathrm{Ass}(M)$. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, etwa $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(u)$ mit $u \in \bigoplus_{\nu=1}^n M_{i_\nu}$. Es folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\bigoplus_\nu M_{i_\nu}) = \bigcup_{\nu=1}^n \mathrm{Ass}(M_{i_\nu}) \subset \bigcup_{i \in i} \mathrm{Ass}(M_i)$. $\square$

**Satz 1.** *Sei $R$ noethersch und ${}_RM \neq 0$ endlich erzeugt. Dann gilt:*
(i) *Ist $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primideal über* $\mathrm{Ann}_R(M)$*, so folgt* $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Ass}(M)$*.*
(ii) *Die Menge* $\mathrm{Ass}(M)$ *ist nicht leer und endlich.*
(iii) *Genau dann ist* $x \in \bigcup \mathrm{Ass}(M)$*, wenn $x$ ein Nullteiler bezüglich $M$ ist.*
(iv) *Genau dann ist* $x \in \bigcap \mathrm{Ass}(M)$*, wenn $x$ nilpotent bezüglich $M$ ist, d.h. $x^e M = 0$ für ein $e \geq 1$ ist.*

*Beweis.*
(i) Aus $M = \sum_{i=1}^n Ru_i$ folgt $\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_R(u_i) \subset \mathfrak{p}_0$, also $\mathrm{Ann}_R(u_j) \subset \mathfrak{p}_0$ für ein $j$, da $\mathfrak{p}_0$ prim ist, so dass die Menge

$$\mathcal{M} = \{\mathfrak{a} \subset R \colon \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0 \text{ und } \mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(u) \text{ für ein } u \in M\}$$

nicht leer ist. Da $R$ noethersch ist, existiert ein maximales Element $\mathfrak{a}_0 = \operatorname{Ann}_R(u_0)$ von $\mathcal{M}$. Das ist ein Primideal (also $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_0$), denn sei $xy \in \mathfrak{a}_0$ und $x \notin \mathfrak{a}_0$. Dann ist $\operatorname{Ann}_R(xu_0) \subset \mathfrak{p}_0$, denn andernfalls, etwa $sxu_0 = 0$ und $s \notin \mathfrak{p}_0$, wäre $\operatorname{Ann}_R(su_0) \subset \mathfrak{p}_0$ und wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}_0$ wäre dann $\mathfrak{a}_0 = \operatorname{Ann}_R(su_0)$, also wäre $x \in \mathfrak{a}_0$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}_0$ folgt $\mathfrak{a}_0 = \operatorname{Ann}_R(xu_0)$. Aus $y \in \operatorname{Ann}_R(xu_0)$ folgt also $y \in \mathfrak{a}_0$.

(ii) Die Menge $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\colon \operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{p}\}$ ist induktiv nach unten geordnet, hat also nach Zorn ein minimales Element $\mathfrak{p}_1$. Nach (i) folgt $R/\mathfrak{p}_1 \cong M_1 \subset M$. Falls $M_1 \neq M$, gilt ebenso $R/\mathfrak{p}_2 \cong M_2/M_1 \subset M/M_1$, also gibt es – da $M$ noethersch ist – eine endliche Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$$

mit $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ für alle $1 \leq i \leq k$. Nach (L1,i) folgt

$$\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(M_1) \cup \operatorname{Ass}(M_2/M_1) \cup \cdots \cup \operatorname{Ass}(M_k/M_{k-1}),$$

also $\operatorname{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k\}$.

(iii) Sei $x \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ und $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(u)$. Dann ist $xu = 0$ und $u \neq 0$. Ist umgekehrt $xu = 0$ für ein $0 \neq u \in M$, so ist $\operatorname{Ass}(Ru) \neq \emptyset$, etwa $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(Ru)$. Dann ist $x \in \operatorname{Ann}_R(Ru) \subset \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

(iv) Sei $x \in \bigcap \operatorname{Ass}(M)$ und

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$$

mit $M_i/M_{i-1} = R/\mathfrak{p}_i$. Für jedes $\mathfrak{p}_i$ existiert ein minimales Primideal $\mathfrak{q}_i$ über $\operatorname{Ann}_R(M)$ mit $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}_i$ und es folgt $\mathfrak{q}_i \in \operatorname{Ass}(M)$. Also ist $x \in \mathfrak{q}_i$, d.h. es gilt $x(M_i/M_{i-1}) = 0$ für jedes $i$. Daraus folgt $x^k M = 0$.
Umgekehrt folgt aus $x^e M = 0$, dass $x^e \in \operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. □

**Beispiel.** Es ist $\operatorname{Ass}(k^{\mathbb{N}}/k^{(\mathbb{N})}) = \emptyset$.

**Folgerung.** Ist $R$ noethersch, ${}_RM \neq 0$ endlich erzeugt und $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}) = 0$, so enthält $\mathfrak{a}$ einen Nichtnullteiler bezüglich $M$.

*Beweis.* Seien zunächst $R$ und $\mathfrak{a}$ beliebig und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{q}_m$ mit Primidealen $\mathfrak{q}_i$. Dann folgt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_j$ für ein $j$, denn man kann annehmen, dass die $\mathfrak{q}_i$ paarweise unvergleichbar sind und dass $m \geq 2$. Wäre $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{q}_i$ für alle $i$, so wäre $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_1 \ldots \widehat{\mathfrak{q}_i} \ldots \mathfrak{q}_m \not\subset \mathfrak{q}_i$ für alle $1 \leq i \leq m$, etwa $x_i \in \mathfrak{a}\mathfrak{q}_1 \ldots \widehat{\mathfrak{q}_i} \ldots \mathfrak{q}_m$ aber $x_i \notin \mathfrak{q}_i$. Aber dann wäre $\sum_\nu x_\nu \in \mathfrak{a}$ aber $\sum_\nu x_\nu \notin \mathfrak{q}_i$ für alle $i$.

Sei nun $R$ noethersch, $M$ endlich erzeugt und $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}) = 0$. Angenommen alle $x \in \mathfrak{a}$ sind Nullteiler bezüglich $M$. Damit folgt $\mathfrak{a} \subset \bigcup \operatorname{Ass}(M)$, also $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$, da $\operatorname{Ass}(M)$ endlich ist. Mit $\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_R(v)$ folgt $0 \neq v \in \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$. □

**Lemma 2** (Nakayama)**.** *Sei $M$ endlich erzeugt und $\mathfrak{a}$-teilbar, d.h. $\mathfrak{a}M = M$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $xu = u$ für alle $u \in M$. Man beachte, dass*

$$\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \colon n \geq 1, a_i \in \mathfrak{a}, u_i \in M \right\}.$$

*Beweis.* Ist $M$ endlich erzeugt, $M = \sum_{i=1}^{n} R u_i$, gilt nach Voraussetzung $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$, also

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. mit der Matrix $D = (\delta_{ij} - a_{ij}) \in R^{n \times n}$ und ihrer Adjunkten $\widetilde{D}$ gilt $\widetilde{D}D = dE_n$ mit $d = \det(D) = 1 - x$ für ein $x \in \mathfrak{a}$. Aus $du_i = 0$ für alle $i$ folgt $(1 - x)M = dM = 0$, d.h. $(1 - x)u = 0$ für alle $u \in M$, bzw. $xu = u$ für alle $u \in M$. □

Für jeden Ring $R$ heißt $\mathfrak{J} = \bigcap \operatorname{Max}(R)$ das *Jacobsonradikal* von $R$. Falls $x \in \mathfrak{J}$, liegt $1 - x$ in keinem maximalen Ideal, d.h. $1 - x \in R^{\times}$. Man erhält die klassische Form des Lemmas von Nakayama:

**Folgerung.** Ist $M$ endlich erzeugt und $\mathfrak{J}M = M$, so folgt $M = 0$.

*Beweis.* Nach (L2) gibt es ein $x \in \mathfrak{J}$ mit $(1 - x)u = 0$ für alle $u \in M$. Aber $(1 - x) \in R^{\times}$, also folgt $M = 0$. □

Ist $M$ ein $R$–Modul, so heißt eine Folge $x_1, \dots, x_n$ von Ringelementen *$M$–regulär* oder kurz *$M$–Folge*, wenn gilt
(i) $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$ und
(ii) $x_1$ ist Nichtnullteiler bezüglich $M$, $x_2$ ist Nichtnullteiler bezüglich $M/x_1M$ und allgemeiner ist $x_i$ ein Nichtnullteiler bezüglich $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ für alle $i > 1$.

In diesem Fall sind die $x_i$ paarweise verschieden, sogar $x_1M \subsetneq (x_1, x_2)M \subsetneq \dots$, denn wäre $(x_1, \dots, x_m)M = (x_1, \dots, x_{m-1})M$, so wäre $x_{m+1}M \subset (x_1, \dots, x_m)M$, also wegen (ii) bereits $M \subset (x_1, \dots, x_m)M$, was wegen (i) unmöglich ist.

Liegen alle $x_i$ in einem gemeinsamen Ideal $\mathfrak{a}$, so heißt $x_1, \dots, x_n$ eine *$M$–Folge in $\mathfrak{a}$* und dann ist $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}) = 0$, weil $x_1$ ein Nichtnullteiler bezüglich $M$ ist.

**Beispiel 1.** Sei $A \neq 0$ ein kommutativer Ring. Dann bilden die Variablen $x_1, \dots, x_n$ im Polynomring $R = A[x_1, \dots, x_n]$ eine $R$–Folge.

*Beweis.* Die Bedingung (i) ist klar. Aus $x_1 f = 0$ folgt natürlich $f = 0$. Ist $x_2 f \in (x_1)$, folgt mit $f = \sum_i g_i x_1^i$, worin alle $g_i$ unabhängig von $x_1$ sind, dass $x_2 g_0 \in (x_1)$, d.h. $g_0 = 0$ und es folgt $f \in (x_1)$. Analog folgt der Rest von Bedingung (ii). □

**Beispiel 2.** Seien $A$ und $B$ kommutative Ringe, $A \neq 0$ und $b_1, b_2$ eine $B$–Folge. Im Produkt $R = A \times B$ ist dann $x_1 = (1, b_1)$, $x_2 = (0, b_2)$ eine $R$–Folge, nicht aber $x_2$, $x_1$.

**Lemma 3.** *Sei $R$ noethersch, $M$ endlich erzeugt und $x_1, \ldots, x_n$ eine $M$–Folge im Jacobsonradikal $\mathfrak{J} = \bigcap \mathrm{Max}(R)$. Dann ist auch jede Permutation der $x_i$ eine $M$–Folge.*

*Beweis.* Bedingung (i) ist trivialerweise erfüllt, genau wie die Aussage im Fall $n = 1$. Sei also $n = 2$. Dann ist $x_2$ ein Nichtnullteiler bezüglich $M$, denn $\mathrm{Ann}_M(x_2)$ ist durch $x_1$ teilbar, also erst recht $\mathfrak{J}$–teilbar, d.h. nach Nakayama ist $\mathrm{Ann}_M(x_2) = 0$. Um zu sehen, dass $\mathrm{Ann}_M(x_2)$ durch $x_2$ teilbar ist, sei $u \in \mathrm{Ann}_M(x_2)$. Dann ist $x_2 u = 0$, also $u = x_1 v$, da $x_1$, $x_2$ eine reguläre Folge ist. Wegen $0 = x_2 x_1 v$, also $x_2 v = 0$, ist $v \in \mathrm{Ann}_M(x_2)$. Natürlich ist $x_1$ ein Nichtnullteiler bezüglich $M/x_2M$, denn $x_1 u \in x_2 M$, etwa $x_1 u = x_2 v$, impliziert $v = x_1 w$, weil $x_2$ ein Nichtnullteiler bezüglich $M/x_1M$ ist. Zusammen folgt $x_1(u - x_2 w) = 0$, d.h. $u \in x_2 M$, weil $x_1$ ein Nichtnullteiler bezüglich $M$ ist.

Der Fall $n \geq 3$ folgt, weil jede Permutation ein Produkt von Nachbarnvertauschungen ist und für Nachbarnvertauschungen folgt das Resultat aus dem Fall $n = 2$. □

**Satz 2.** *Sei $R$ noethersch, $M$ endlich erzeugt und $\mathfrak{a}M \neq M$. Dann gilt:*

(i) *Es gibt ein $n \geq 0$ mit $\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{a}, M) \neq 0$, und das kleinste $n$ mit dieser Eigenschaft heißt die* Tiefe *von $M$ in $\mathfrak{a}$, in Zeichen $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M)$.*

(ii) *Ist $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) = 0$, so gibt es keine $M$–Folge in $\mathfrak{a}$.*

(iii) *Ist $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) = n \geq 1$, so gibt es eine $M$–Folge $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathfrak{a}$, und für jede weitere $M$–Folge $y_1, \ldots, y_p$ in $\mathfrak{a}$ gilt $p \leq n$; ist $p < n$, so lässt sich $y_1, \ldots, y_p$ zu einer $M$–Folge $y_1, \ldots, y_p, z_{p+1}, \ldots, z_n$ in $\mathfrak{a}$ ergänzen.*

*Beweis.*

(i) Angenommen, alle $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$ wären 0. Dann hätte man insbesondere, dass $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M) \cong \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}) = 0$, so dass $\mathfrak{a}$ nach (S1,F) einen Nichtnullteiler $x_1$ bezüglich $M$ enthält. Nach (8,L3) ist $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M/x_1M) = 0$, so dass wieder $\mathfrak{a}$ einen Nichtnullteiler $x_2$ bezüglich $M/x_1M$ enthält, und so weiter. Man erhält eine Folge

$$(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq (x_1, x_2, x_3) \subsetneq \ldots$$

im Widerspruch zur Annahme, dass $R$ noethersch ist.

(ii) Ist $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) = 0$, so ist $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M) \cong \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}) \neq 0$, so dass $\mathfrak{a}$ nur aus Nullteilern bezüglich $M$ besteht.

(iii) Sei $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) = n \geq 1$. Dann sind

$$\mathrm{Ext}^0_R(R/\mathfrak{a}, M) = \cdots = \mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$$

und wie in (i) erhält man eine $M$–Folge $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathfrak{a}$. Ist $y_1, \ldots, y_p$ eine weitere $M$–Folge in $\mathfrak{a}$, folgt $p \leq n$, denn wäre $p > n$, so wäre

$$\mathrm{Ext}^{p-1}_R(R/\mathfrak{a}, M) = \cdots = \mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$$

im Widerspruch zu $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = n$.
Ist aber $p < n$, folgt mit $M' = M/(y_1, \ldots, y_p)M$, dass

$$\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{a}, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M') = 0$$

ist, also $\mathfrak{a}$ einen Nichtnullteiler $z_{p+1}$ bezüglich $M'$ enthält. Man erhält eine $M$–Folge $y_1, \ldots, y_p, z_{p+1}$ in $\mathfrak{a}$. Iteration liefert eine $M$–Folge $y_1, \ldots, y_p, z_{p+1}, \ldots, z_n$ in $\mathfrak{a}$. □

**Folgerung 1.** Sei $R$ noethersch, $M$ endlich erzeugt und $\mathfrak{a}M \neq M$. Dann gilt für jede $M$–Folge $x_1, \ldots, x_p$ in $\mathfrak{a}$, dass

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M/(x_1, \ldots, x_p)M) = \mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) - p.$$

*Beweis.* Es genügt hier, den Fall $p = 1$ zu zeigen. Auch $M' = M/x_1M$ ist endlich erzeugt und $\mathfrak{a}M' \neq M'$, wegen $x_1 \in \mathfrak{a}$, und aus der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \xrightarrow{\nu} M' \longrightarrow 0$$

erhält man die exakte Folge

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M) \xrightarrow{\nu_*} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{a}, M) \xrightarrow{x_1} \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{a}, M).$$

Aber Multiplikation mit $x_1$ ist 0 auf $Ext^{i+1}_R(R/\mathfrak{a}, M)$, also ist der Homomorphismus $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M') \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{a}, M)$ ein Epimorphismus. Ist $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = n \geq 1$, so ist

$$0 = \mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/\mathfrak{a}, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/\mathfrak{a}, M') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{a}, M) \longrightarrow 0$$

exakt, also $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M') = n - 1$. □

**Folgerung 2.** Sei $R$ noethersch, $M$ endlich erzeugt und $\mathfrak{a}M \neq M$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{p}M \neq M$ und

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{t}_{\mathfrak{p}}(M).$$

*Beweis.* Bei $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = 0$, d.h. $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}) \neq 0$, folgt mit irgendeinem $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}))$, dass $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}M \neq M$, denn sonst wäre $(1 - x)M = 0$ für ein $x \in \mathfrak{p}$ nach dem Lemma von Nakayama und $1 - x \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \neq R$. Wegen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ ist $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$, also $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}) \neq 0$. Daraus folgt $\mathrm{t}_{\mathfrak{p}}(M) = 0$.

Ist $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = n \geq 1$, wähle man eine $M$–Folge $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathfrak{a}$. Für den Faktormodul $M' = M/(x_1, \ldots, x_n)M$ ist $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Also existiert ein Primideal $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{p}M' \neq M'$ und $\mathrm{t}_{\mathfrak{p}}(M') = 0$. Dann ist $\mathfrak{p}M \neq M$ und $\mathrm{t}_{\mathfrak{p}}(M) = n$. □

**Folgerung 3.** Sei $R$ noethersch, $M$ endlich erzeugt und $\mathfrak{a}M \neq M$. Dann gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, dass auch $\mathfrak{b}M \neq M$ ist und

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{t}_{\mathfrak{b}}(M).$$

*Beweis.* Es ist $\mathfrak{b}M \neq M$, denn sonst wäre nach Nakayama $(1-b)M = 0$ für ein $b \in \mathfrak{b}$, mit $b^e \in \mathfrak{a}$ für ein $e \geq 1$ wäre also $\mathfrak{a}M = M$. Mit einem $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ wie in (F2) folgt $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{t}_{\mathfrak{p}}(M) \geq \mathrm{t}_{\mathfrak{b}}(M)$, denn $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$, und klar ist $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) \leq \mathrm{t}_{\mathfrak{b}}(M)$. □

# X. Der lokale Fall

Ein kommutativer Ring $R$ heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt. Dann heißt $k = R/\mathfrak{m}$ der *Restklassenkörper* von $R$. Zum Beispiel sind Körper lokal; der Potenzreihenring $R = K[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ über einem Körper $K$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$; der Ring $R = \mathbb{Z}/(p^n)$ mit $n \geq 1$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (\overline{p})$.

**Bemerkung.** Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal und $M$ ein beliebiger $R$–Modul. Dann gilt:

(i) Es ist $\mathfrak{m}M = \bigcap\{U \subset M \colon U \subsetneq M \text{ maximal}\}$. Dieser Untermodul heißt das *Jacobsonradikal* von $M$.

(ii) Es ist $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m}) = \sum\{U \subset M \colon U \text{ ist einfach}\}$. Dieser Untermodul heißt der *Sockel* von $M$.

*Beweis.*

(i) Ist $U \subsetneq M$ maximal, so ist $M/U \cong R/\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m}M \subset U$. Sei umgekehrt $v \in M \smallsetminus \mathfrak{m}M$. Dann gibt es einen $k$–Homomorphismus $f \colon M/\mathfrak{m}M \longrightarrow k$ mit $f(\overline{v}) \neq 0$. Dann ist $v \notin \ker(f \circ \nu)$ mit der kanonischen Abbildung $\nu \colon M \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M$ und $\ker(f \circ \nu) \subsetneq M$ ist maximal.

(ii) Der Untermodul $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m})$ wird durch $\mathfrak{m}$ annulliert, ist also ein $k$–Vektorraum und hat eine $k$–Basis $(u_i)_{i \in I}$. Das heißt

$$\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m}) = \bigoplus_{i \in I} k.u_i = \bigoplus_{i \in I} Ru_i.$$

Alle $Ru_i \cong k$ sind einfach und es folgt die Richtung "$\subset$". Die andere Richtung folgt wie in (i). □

**Lemma 1.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal, $M$ endlich erzeugt und $n = \dim_k(M/\mathfrak{m}M)$.*

(i) *Jedes Erzeugendensystem von $M$ enthält ein unverkürzbares Erzeugendensystem, und jedes unverkürzbare Erzeugendensystem von $M$ hat genau $n$ Elemente.*

(ii) *Es gibt einen Epimorphismus $f \colon F \twoheadrightarrow M$ derart, dass $F$ frei und $\ker(f) \subset \mathfrak{m}F$ ist. Der Modul $F$ ist dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, nämlich $F \cong R^n$.*

*Beweis.*

(i) Bei $n = 0$ ist $\mathfrak{m}M = M$, also nach Nakayama $M = 0$, so dass $\emptyset$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem von $M$ ist. Bei $n \geq 1$ gilt für jedes Erzeugendensystem $S$ von $M$, dass $\{\overline{s} \colon s \in S\}$ ein Erzeugendensystem des $k$–Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$ ist, also eine $k$–Basis $\{\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n}\}$ enthält. Insbesondere gilt $|S| \geq n$ für jedes Erzeugendensystem $S$ von $M$. Damit ist $S' \coloneqq \{s_1, \ldots, s_n\}$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem von $M$, denn mit $U = \sum_i Rs_i$ folgt $U + \mathfrak{m}M = M$, denn $\overline{U} = \overline{M}$, also ist $\mathfrak{m} \cdot M/U = M/U$ und mit Nakayama folgt $U = M$.

(ii) Bei $n = 0$ setze $F = 0$. Bei $n \geq 1$ wähle ein $k$–Basis $\{\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n}\}$ von $M/\mathfrak{m}M$ und dann ist $\beta\colon R^n \longrightarrow M$ mit $\beta(e_i) = s_i$ ein Epimorphismus, denn wie in (i) erzeugen $s_1, \ldots, s_n$ ganz $M$, mit $\ker \beta \subset \mathfrak{m}R^n$, denn modulo $\mathfrak{m}$ ist $\overline{\beta}\colon R^n/\mathfrak{m}R^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$ ein Epimorphismus, also sogar ein Isomorphismus, denn für die $k$–Dimensionen gilt $\dim_k R^n/\mathfrak{m}R^n = \dim_k M/\mathfrak{m}M$.
Ist $(F, f)$ wie angegeben, wird $\overline{f}\colon F/\mathfrak{m}F \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$ ein Isomorphismus, denn ist $\overline{f}(\overline{v}) = 0$, also $f(v) \in \mathfrak{m}M$. Schreibe $f(v) = \sum x_j f(v_j)$, damit folgt dann $v - \sum x_j v_j \in \ker f \subset \mathfrak{m}F$, also $v \in \mathfrak{m}F$, d.h. $\overline{v} = 0$. Mit $F \cong R^{(I)}$ folgt $k^{(I)} \cong k^n$, also $|I| = n$. □

**Folgerung.** Ist $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal, so sind für einen endlich erzeugten Modul $M$ äquivalent:
(i) $M$ ist frei.
(ii) $M$ ist projektiv.
(iii) $M$ ist flach.
(iv) $\mathrm{Tor}_1^R(M, k) = 0$.

*Beweis.* Nur (iv→i) ist zu zeigen: Mit $f\colon F \twoheadrightarrow M$ wie in Teil (ii) des Lemmas und $K = \ker f$ ist in

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, no head] & \mathrm{Tor}_1^R(M,k) \arrow[r, no head] \arrow[d, equal] & K \otimes_R k \arrow[r, no head] & F \otimes_R k \arrow[r, no head, "f\otimes 1"] \arrow[d, no head, "\wr"] & M \otimes_R k \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "\wr"] & 0 \\
& 0 & & F/\mathfrak{m}F \arrow[r, no head, "\overline{f}"'] & M/\mathfrak{m}M &
\end{tikzcd}$$

die obere Zeile exakt und $f \otimes 1$ ein Isomorphismus, also $K/\mathfrak{m}K \cong K \otimes_R k = 0$. Es folgt $K = 0$ nach Nakayama, das heißt $M \cong F$ ist frei. □

**Bemerkung.** Für (iv→iii) bzw. (iii→ii) vergleiche (VII,L2) bzw. (VII,S3), und nach Kaplansky ist über einem lokalen Ring *jeder* projektive Modul frei.

**Lemma 2.** *Sei* $(R, \mathfrak{m})$ *noethersch und lokal und* $M \neq 0$ *endlich erzeugt. Dann gilt genau dann* $\mathrm{pd}(M) \leq n$, *wenn* $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, k) = 0$.

*Beweis.* Sei $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, k) = 0$ und $f\colon F \twoheadrightarrow M$ wie in (L1), d.h. $F$ endlich erzeugt und frei und $K = \ker f \subset \mathfrak{m}F$. Bei $n = 0$ ist

$$\mathrm{Hom}_R(F, k) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}_R(K, k) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, k) = 0$$

exakt, wobei $\iota\colon K \hookrightarrow \mathfrak{m}F$ die Inklusion sei. Es ist $\iota^* = 0$, denn für jedes $\alpha\colon F \longrightarrow k$ ist $\alpha(\mathfrak{m}F) = 0$, also $\alpha(K) = 0$. Damit folgt $\mathrm{Hom}_R(K, k) = 0$, also $K/\mathfrak{m}K = 0$. Nach Nakayama folgt $K = 0$, da $K$ endlich erzeugt ist, weil $R$ noethersch ist. Also ist $M$ frei.

Bei $n \geq 1$ folgt aus

$$0 = \operatorname{Ext}^n_R(F,k) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_R(K,k) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}_R(M,k) = 0$$

nach Induktion $K = 0$ oder $\operatorname{pd}(K) \leq n-1$, so dass man für jeden $R$–Modul $A$

$$0 = \operatorname{Ext}^n_R(K,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}_R(M,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}_R(F,A) = 0$$

hat, d.h. $\operatorname{pd}(M) \leq n$. □

**Folgerung.** Sei $(R,\mathfrak{m})$ noethersch und lokal, $M$ endlich erzeugt und $x_1,\dots,x_p$ eine $M$–Folge. Dann gilt $\operatorname{pd}(M/(x_1,\dots,x_p)M) = \operatorname{pd}(M)+p$. Ist speziell $x_1,\dots,x_p$ eine $R$–Folge, so ist $\operatorname{pd}(R/(x_1,\dots,x_p)) = p$.

*Beweis.* Induktiv kann man $p = 1$ annehmen und mit $M' = M/x_1M$ erhält man aus

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

die lange exakte Folge

$$\cdots \xrightarrow{x_1} \operatorname{Ext}^i_R(M,k) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M',k) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M,k) \xrightarrow{x_1} \cdots$$

Aber auf $k$ ist Multiplikation mit $x_1$ die Nullabbildung, also ist der Homomorphismus $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(M',k) \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M,k)$ surjektiv und $\operatorname{Ext}^i_R(M,k) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M',k)$ ein Monomorphismus. Falls $\operatorname{pd}(M) = \infty$ ist, folgt nach (L2) auch $\operatorname{pd}(M') = \infty$. Falls $\operatorname{pd}(M) = n$, folgt $\operatorname{pd}(M') = n+1$. □

**Hilfssatz.** *Sei $(R,\mathfrak{a})$ beliebig und $\alpha\colon A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus mit $A$ endlich erzeugt und frei und* $\operatorname{im}\alpha \subset \mathfrak{a}B$. *Dann sind alle $\alpha_*\colon \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},B)$ null.*

*Beweis.* Es ist $\alpha \in \mathfrak{a}\cdot \operatorname{Hom}_R(A,B)$, denn mit $A = R^m$ und $m \geq 1$ ist der Homomorphismus $\omega\colon \operatorname{Hom}_R(A,B) \longrightarrow B^m$ mit $\omega(f) = (f(e_1),\dots,f(e_m))$ ein Isomorphismus und nach Voraussetzung ist $\omega(\alpha) \in \mathfrak{a}B^m$. Mit $\alpha = \sum x_j\alpha_j$ mit $x_j \in \mathfrak{a}$ folgt $\alpha_* = \sum x_j(\alpha_j)_*\colon \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},B)$, aber Multiplikation mit jedem $x_j$ ist die Nullabbildung auf $R/\mathfrak{a}$. Also ist $\alpha_* = 0$. □

**Satz 1** (Auslander-Buchsbaum)**.** *Sei $(R,\mathfrak{m})$ noethersch und lokal, $M \neq 0$ endlich erzeugt und* $\operatorname{pd}(M) < \infty$. *Dann gilt*

$$\operatorname{pd}(M) = \operatorname{t}_{\mathfrak{m}}(R) - \operatorname{t}_{\mathfrak{m}}(M).$$

*Beweis.* Wir führen Induktion über $n = \mathrm{pd}(M)$. Bei $n = 0$ ist $M \cong R^m$, $m \geq 1$, nach (L1,F). Wegen $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \cong \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, R)^m$ ist also $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) = \mathrm{t}_\mathfrak{m}(M)$.

Sei nun $n = 1$. Wähle eine exakt Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $B$ endlich erzeugt und frei und $\operatorname{im}\alpha \subset \mathfrak{m}B$. Dann ist auch $A \neq 0$ endlich erzeugt und frei nach (L2), denn $\mathrm{Ext}^1_R(A, k) \cong \mathrm{Ext}^2_R(M, k) = 0$. Also sind in der langen exakten Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(k, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(k, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(k, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(k, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Ext}^1_R(k, B)$$

alle $\alpha_* = 0$. Aus $\mathrm{Hom}_R(k, A) = 0$ folgt dann $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) \geq 1$. Schreibe also $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) = s + 1$ mit $s \geq 0$. Aus

$$\mathrm{Ext}^i(k, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(k, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(k, A)$$

folgt $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(M) = s$, denn $\mathrm{Ext}^s_R(k, M) \neq 0$ wegen $\mathrm{Ext}^{s+1}_R(k, R) \neq 0$ und für $i < s$ ist $\mathrm{Ext}^i_R(k, M) = 0$.

Bei $n > 1$ folgt mit derselben exakten Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

dass $A \neq 0$ endlich erzeugt ist und $\mathrm{pd}(A) = n-1$, denn es ist $\mathrm{Ext}^i_R(A, k) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M, K)$ für alle $i$. Nach Induktion folgt $n - 1 = \mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) - \mathrm{t}_\mathfrak{m}(A)$. Aus $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) \geq 1$ folgt dann $\mathrm{So}(R) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m}) = 0$. Aus $\mathrm{So}(B) = 0$, $\mathrm{So}(A) = 0$ und $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(A) \geq 1$ folgt $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) \geq 0$, also $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) = s + n$ für ein $s \geq 0$. Wie oben folgt dann $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(A) = s + 1$, $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(B) = s + n$ und $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(M) = s$. □

**Bemerkungen.** Sei weiter $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal, $M \neq 0$ endlich erzeugt.

(i) Falls $\mathrm{pd}(M) = \infty$, kann sogar $\mathrm{t}_\mathfrak{m}(R) < \mathrm{t}_\mathfrak{m}(M)$ sein, zum Beispiel, wenn $\mathrm{So}(R) \neq 0$, aber $\mathrm{So}(M) = 0$ ist: Wähle ein $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ und $M = R/\mathfrak{p}$.

(ii) Ist $\mathrm{pd}(M) < \infty$ und $\mathrm{So}(R) \neq 0$, so ist nach dem Satz $M$ bereits projektiv.

Ein Untermodul $U$ von $M$ heißt *klein* von $M$, wenn aus $X + U = M$ stets folgt, dass $X = M$.

**Beispiele.**

(i) Sei $R$ ein Integritätsring mit Quotientenkörper $K \neq R$. Dann ist jeder endlich erzeugte Untermodul $U$ von $K$ klein in $K$, denn aus $X + U = K$ folgt, dass $K/X$ endlich erzeugt und teilbar ist. Also ist $K/X = 0$, denn ansonsten gäbe es einen Epimorphismus $K/X \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$, es gäbe also ein $0 \neq x \in \mathfrak{m}$, so dass $R/\mathfrak{m}$ durch $x$ teilbar ist.

(ii) Ist $U \subset M$ klein und $U \subset^{\oplus} M$, so ist $U = 0$, denn aus $X \oplus U = M$ folgt $X = M$.

(iii) Ist $(R, \mathfrak{m})$ lokal und $M$ endlich erzeugt, so ist $\mathfrak{m}M \subset M$ klein, denn aus $X + \mathfrak{m}M = M$ folgt $\mathfrak{m}(M/X) = M/X$, also $M/X = 0$ nach Nakayama.

Eine projektive Auflösung

$$\mathfrak{A} = \;\cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

von $M$ heißt *minimal*, wenn $\ker \alpha_i \subset A_i$ klein ist für alle $i$. Nicht jeder Modul besitzt eine minimale projektive Auflösung, zum Beispiel $M = K$ in (B1): Angenommen $\alpha_0 \colon A_0 \twoheadrightarrow K$ hat kleinen Kern, ist $\ker \alpha_0 + xA_0 = A_0$ für alle $x \neq 0$, also $xA_0 = A_0$ für alle $x \neq 0$, was unmöglich ist, wenn $A_0$ projektiv ist.

**Behauptung.** Zwei minimale projektive Auflösungen von $M$ sind stets isomorph.

*Beweis.* In einem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, dashed] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, dashed] & A_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_0 \arrow[r, "\beta_0"'] & N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

in dem beide Zeilen minimale projektive Auflösungen sind, ist $\operatorname{im} f_0 + \ker \beta_0 = B_0$, also $f_0$ ein Epimorphismus. Aus $\ker f_0 \subset \ker \alpha_0$, $\ker \alpha_0$ klein in $A_0$ und $\ker f_0 \subset^{\oplus} A_0$ folgt, dass $f_0$ ein Monomorphismus ist. Genauso kann man fortfahren. $\square$

**Satz 2.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal mit Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$, $M$ endlich erzeugt. Dann gilt:*

(i) *$M$ besitzt eine minimale projektive Auflösung*

$$\mathfrak{P} = \;\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

*Darin sind die $P_i$ endlich erzeugt und frei und $\beta_i := \operatorname{rk}(P_i)$ heißt die $i$–te* Betti–Zahl *von $M$.*

(ii) *Es ist $\beta_i(M) = \dim_k \operatorname{Ext}^i_R(M, k) = \dim_k \operatorname{Tor}^R_i(M, k)$.*

*Beweis.*

(i) Nach (L1) gibt es einen Epimorphismus $\mu_0 \colon R^{m_0} \twoheadrightarrow M$ mit $\ker \mu_0 \subset \mathfrak{m}R^{m_0}$, dann einen Epimorphismus $\mu_1' \colon R^{m_1} \twoheadrightarrow \ker \mu_0$ mit $\ker \mu_1' \subset \mathfrak{m}R^{m_1}$, und so weiter. Dann ist

$$\mathfrak{P} = \;\cdots \longrightarrow R^{m_2} \xrightarrow{\mu_2} R^{m_1} \xrightarrow{\mu_1} R^{m_0} \xrightarrow{\mu_0} M \longrightarrow 0.$$

die gewünschte minimale projektive Auflösung. Hier sind die $\mu_i$ jeweils die Kompositionen $R^{m_i} \twoheadrightarrow \ker \mu_{i-1} \hookrightarrow R^{m_{i-1}}$.

(ii) In

$$\mathrm{Hom}_R(\widetilde{\mathfrak{P}}, k) = \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_2, k) \longrightarrow \cdots$$

sind alle Pfeile Null, denn

$$\begin{tikzcd} P_{i+1} \arrow[r, "\mu_{i+1}"] \arrow[dr, "0"'] & P_i \arrow[d, "\varphi"] \\ & k \end{tikzcd}$$

kommutiert wegen $\ker \mu_{i+1} \subset \mathfrak{m}P_{i+1}$, also ist $\mathrm{Ext}^i_R(M, k) \cong \mathrm{Hom}_R(P_i, k) \cong k^{m_i}$. Ebenso sind in

$$\widetilde{\mathfrak{P}} \otimes_R k = \ \cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R k \longrightarrow P_1 \otimes_R k \longrightarrow P_0 \otimes_R k \longrightarrow 0$$

alle Pfeile 0, denn es ist immer $\mu_{i+1}(u) \otimes \overline{x} = 0$ wegen der Minimalität von $\mathfrak{P}$, also ist $\mathrm{Tor}^R_i(M, k) \cong P_i \otimes_R k \cong k^{m_i}$. $\square$

**Bemerkung.** Ist $\beta_n(M) = 0$ für ein $n \geq 0$, folgt $\beta_i(M) = 0$ für alle $i \geq n$.

**Vermutung.** Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal, $M$ und $N$ endlich erzeugt, $\mathrm{pd}(M) < \infty$ und $\mathrm{Tor}^R_n(M, N) = 0$. Dann ist $\mathrm{Tor}^R_i(M, N) = 0$ für alle $i \geq n$.

**Hilfssatz.** *Sei $R$ kommutativ und noethersch.*

(i) *Sind $A$ und $C$ endlich erzeugte $R$–Moduln, so sind auch alle* $\mathrm{Ext}^i_R(C, A)$ *und* $\mathrm{Tor}^R_i(C, A)$ *endlich erzeugt.*

(ii) *Für jeden $R$–Modul $M \neq 0$ gilt* $\mathrm{id}(M) \leq n$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p}, M) = 0$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

*Beweis.*

(i) Es gibt eine Auflösung

$$\mathfrak{P} = \ \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in der alle $P_i$ endlich erzeugt und frei sind, so dass in

$$\mathrm{Hom}_R(\widetilde{\mathfrak{P}}, A) = \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_2, A) \longrightarrow \cdots$$

und

$$\widetilde{\mathfrak{P}} \otimes_R A = \ \cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R A \longrightarrow P_1 \otimes_R A \longrightarrow P_0 \otimes_R A \longrightarrow 0$$

alle Moduln endlich erzeugt sind, also auch alle (Ko-)homologiemoduln.

(ii) Nur die Richtung "←" ist zu zeigen und nach (9,L2) genügt es $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0$ für alle Ideale $I \subsetneq R$ zu zeigen. Nach (9,L1) gibt es Ideale

$$I = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_d = R$$

mit $I_j/I_{j-1} \cong R/\mathfrak{p}_j$ für $1 \leq j \leq d$. Aus

$$0 \longrightarrow I_1/I \hookrightarrow I_2/I \twoheadrightarrow I_2/I_1 \longrightarrow 0$$

und $I_1/I \cong R/\mathfrak{p}_1$ und $I_2/I_1 \cong R/\mathfrak{p}_2$ folgt $\mathrm{Ext}_R(I_2/I, M) = 0$, $\mathrm{Ext}_R(I_3/I, M) = 0$, etc. Schließlich folgt $\mathrm{Ext}_R(R/I, M) = 0$. □

**Lemma 3.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal und $M \neq 0$ endlich erzeugt. Dann ist genau dann $\mathrm{id}(M) \leq n$, wenn $\mathrm{Ext}_R^i(k, M) = 0$ für alle $i \geq n+1$.*

*Beweis.* Ist $A$ endlich erzeugt, $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, A) \neq 0$ und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, so gibt es ein $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ mit $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{q}, A) \neq 0$: Sei $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ und $C = R/\mathfrak{p}$. Nach (9,S1) gibt es Untermoduln

$$0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d = C/xC$$

mit $U_j/U_{j-1} \cong R/\mathfrak{q}_i$. Insbesondere ist $\mathfrak{p} + (x) \subset \mathfrak{q}_j$ für alle $1 \leq j \leq d$. Angenommen, alle $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{q}_i, A) = 0$, so wäre $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(C/xC, A) = 0$. Mit

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{x} C \twoheadrightarrow C/xC \longrightarrow 0$$

ist also auch

$$\mathrm{Ext}_R^i(C, A) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_R^i(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(C/xC, A) = 0$$

exakt. Also ist $\mathrm{Ext}_R^i(C, A)$ endlich erzeugt und $\mathfrak{m}$–teilbar, also nach dem Lemma von Nakayama $\mathrm{Ext}_R^i(C, A) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, A) \neq 0$.

Sei jetzt $M \neq 0$ endlich erzeugt und $\mathrm{Ext}_R^i(k, M) = 0$ für alle $i \geq n+1$. Angenommen, es gäbe ein Primideal $\mathfrak{p}_0$ mit $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{p}_0, M) \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{p}_0 \neq \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1$ mit $\mathrm{Ext}_R^{n+2}(R/\mathfrak{p}_1, M) \neq 0$. Also ist auch $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ mit $\mathrm{Ext}_R^{n+3}(R/\mathfrak{p}_2, M) \neq 0$ und so weiter. Man erhält eine echt aufsteigende Kette von Primidealen in $R$ im Widerspruch zur Annahme, $R$ sei noethersch. Also ist $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{p}, M) = 0$ für alle $\mathfrak{p}$, also $\mathrm{id}(M) \neq n$ nach dem Hilfssatz. □

**Bemerkung.** Im Unterschied zu (L2) genügt bei "←" nicht $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(k, M) = 0$. Für $R = k[\![X_1, X_2]\!]$ ist $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R) = 2$, denn $X_1, X_2$ ist eine maximale $R$–Folge in $\mathfrak{m}$, also $\mathrm{Ext}_R^1(k, R) = 0$, aber $\mathrm{id}(R) \neq 0$, denn jeder injektive Integritätsring ist bereits ein Körper.

Ist $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal, $M$ endlich erzeugt, so heißt $\mu^i(M) := \dim_k \mathrm{Ext}_R^i(k, M)$ die $i$–te *Bass–Zahl* von $M$.

**Folgerung.** Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal. Dann sind für $n \geq 0$ äquivalent:

(i) $\mathrm{id}(A) \leq n$ für alle $A \neq 0$.

(i′) $\mathrm{id}(k) \leq n$.

(ii) $\mathrm{pd}(C) \leq n$ für alle $C \neq 0$.

(ii′) $\mathrm{pd}(k) \leq n$.

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist die Folgerung zu (8,L2). Bei (ii′ →i) ist $\mathrm{Ext}^i_R(k, A) = 0$ für alle $i \geq n+1$ und alle $A$, also nach (L3) $\mathrm{id}(k) \leq n$. Bei (i′→ii) ist $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(C, k) = 0$ für alle $C$, also $\mathrm{pd}(M) \leq n$ für alle endlich erzeugten $M \neq 0$ nach (L2). Also ist wieder nach der Folgerung zu (8,L2) $\mathrm{pd}(C) \leq n$ für alle $C \neq 0$. □

Für die sogenannte *globale Dimension* $\mathrm{gd}(R) \coloneqq \sup\{\mathrm{pd}(C) \colon 0 \neq C \in R\text{-}\mathbf{Mod}\}$ gilt also $\mathrm{gd}(R) = \mathrm{pd}(k) = \mathrm{id}(k)$.

**Satz 3** (Bass)**.** *Sei* $(R, \mathfrak{m})$ *noethersch und lokal,* $M \neq 0$ *endlich erzeugt und* $\mathrm{id}(M) < \infty$. *Dann gilt*

$$\mathrm{id}(M) = \mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R).$$

*Beweis.* Sei $\mathrm{id}(M) = n$ und $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R) = m$. Außerdem sei $C \neq 0$ ein endlich erzeugter $R$–Modul mit $\mathrm{pd}(C) = m$ und $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(C) = 0$: Bei $m = 0$ wähle $C = R$, bei $m \geq 1$ wähle eine $R$–Folge $x_1, \ldots, x_m$ in $\mathfrak{m}$ und definiere $C = R/(x_1, \ldots, x_m)$.

Aus $\mathrm{So}(C) \neq 0$ folgt $k \xrightarrow{\alpha} C$, also ist

$$\mathrm{Ext}^n_R(C, M) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Ext}^n_R(k, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(\operatorname{coker} \alpha, M) = 0$$

exakt und $\mathrm{Ext}^n_R(k, M) \neq 0$ nach (L3). Es folgt $\mathrm{Ext}^n_R(C, M) \neq 0$, also $m = \mathrm{pd}(C) \geq n$.

Angenommen, es wäre $m > n$. Mit einem Epimorphismus $\beta \colon M \twoheadrightarrow k$ erhält man dann

$$0 = \mathrm{Ext}^m_R(C, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^m_R(C, k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{m+1}_R(C, \ker \beta) = 0,$$

also wäre $\mathrm{Ext}^m_R(C, k) = 0$ im Widerspruch zu $\mathrm{pd}(C) = m$ wegen (L2). □

**Folgerung.** Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal und es existiere ein endlicher erzeugter $R$–Modul $M \neq 0$ mit $\mathrm{id}(M) < \infty$. Dann gilt

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(C) \leq \mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R)$$

für alle endlich erzeugten $R$–Moduln $C \neq 0$.

*Beweis.* Sei $\mathrm{t}(R) = \mathrm{id}(M) = m$. und $\mathrm{t}(C) = n$. Falls $n \leq m$ ist, gilt $\mathrm{Ext}^i_R(C, M) = 0$ für alle $i > m - n$: Für $n = 0$ ist das klar. Bei $n \geq 1$ gibt es ein $x \in \mathfrak{m}$, das Nichtnullteiler bezüglich $C$ ist, also

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{x} C \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C/xC \longrightarrow 0$$

exakt ist. Für alle $i > m - n$, also $i + 1 > m - (n - 1)$, ist $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(C/xC, M) = 0$ nach Induktion, so dass aus

$$\operatorname{Ext}_R^i(C, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_R^i(C, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{i+1}(C/xC, M) = 0$$

nach Nakayama bereits $\operatorname{Ext}_R^i(C, M) = 0$ folgt.

Falls $n \leq m$ ist, gilt $\operatorname{Ext}_R^{m-n}(C, M) \neq 0$: Für $n = 0$ ist $\mathrm{t}(C) = 0$, also existiert eine Einbettung $k \xrightarrow{\alpha} C$ und wie in (S3) folgt $\operatorname{Ext}_R^m(C, M) \neq 0$. Bei $n \geq 1$ gibt es ein $x \in \mathfrak{m}$, das Nichtnullteiler bezüglich $C$ ist, also

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{x} C \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C/xC \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann ist auch

$$\operatorname{Ext}_R^{m-n}(C, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{m-n+1}(C/xC, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{m-n+1}(C, M) = 0$$

exakt und $\operatorname{Ext}_R^{m-n+1}(C/xC, M) \neq 0$ nach Induktion. Also ist auch $\operatorname{Ext}_R^{m-n}(C, M) \neq 0$.

Angenommen die Folgerung ist falsch, das heißt es existiert ein endlich erzeugter $R$–Modul $C \neq 0$ mit $\mathrm{t}(C) > \mathrm{t}(R) = m$. Ohne Einschränkung sei $\mathrm{t}(C) = m + 1$. Mit einem $x \in \mathfrak{m}$, das Nichtnullteiler bezüglich $C$ ist, folgt $\mathrm{t}(C/xC) = m$, also $\operatorname{Ext}_R^1(C/xC, M) = 0$ nach der ersten Bemerkung oben. Aus

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C/xC, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Hom}_R(C, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(C/xC, M) = 0$$

folgt mit Nakayama $\operatorname{Hom}_R(C, M) = 0$, also auch $\operatorname{Hom}_R(C/xC, M) = 0$. Aber das widerspricht der zweiten Bemerkung oben: $\operatorname{Hom}_R(C/xC, M) = \operatorname{Ext}_R^0(C/xC, M) \neq 0$. □

**Bemerkungen.**

(i) Aus (S3) folgt, falls $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R) = 0$, d.h. $\mathrm{So}(R) \neq 0$ ist, dass ein endlich erzeugter Modul mit endlicher injektiver Dimension bereits injektiv ist.

(ii) Nach der Bemerkung zu (S1) gibt es bei $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ einen endlich erzeugten $R$–Modul $C \neq 0$ mit $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(C) \neq 0$. Also gibt es dann *keinen* $R$–Modul $M \neq 0$ mit $\mathrm{id}(M) < \infty$. Es stellt sich heraus, dass genau dann solch ein Modul $M$ existiert, wenn $R$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist.