Vorlesung aus dem Sommersemester 2011

Geometrie und Topologie von Flächen

Priv.-Doz. Dr. Hartmut Weiß

geTEXt von Viktor Kleen & Florian Stecker

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven

1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt (parametrisierte) *Kurve*. Das Bild $\operatorname{im}\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Spur* der Kurve. Ist $I = [a, b]$ kompakt, so heißt γ *rektifizierbar*, falls

$$L(\gamma) := \sup_{a=t_0<\dots<t_N=b} \sum_{i=1}^{N} d_2(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) < \infty.$$

$L(\gamma)$ heißt die *Länge* von γ.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein $\phi\colon X \to X$ heißt *Isometrie* von X, falls $d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Eine Isometrie von $(\mathbb{R}^n, d_2)$ heißt auch *Bewegung*.

Bemerkung. Jede Bewegung ist von der Form $\phi(x) = Ax + b$ für $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und ϕ eine Bewegung, so gilt $L(\phi \circ \gamma) = L(\gamma)$. Insbesondere ist $\phi \circ \gamma$ rektifizierbar, wenn γ rektifizierbar ist.

Definition. Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt

- *(stetig) differenzierbar*, wenn $\gamma_i\colon I \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ (stetig) differenzierbar ist.
- *Lipschitz* oder *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert mit $d_2(\gamma(t), \gamma(s)) \leq L|t-s|$ für $t, s \in I$. Solch ein L heißt Lipschitz-Konstante.
- *regulär*, wenn γ differenzierbar und $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \neq 0$ ist.
- *$\mathscr{C}^k$-Kurve*, wenn γ k-mal stetig differenzierbar ist.
- *$\mathscr{C}^\infty$-Kurve*, wenn γ beliebig oft differenzierbar ist.

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, so ist γ rektifizierbar mit $L(\gamma) \leq L\cdot(b-a)$ für jede Lipschitz-Konstante L.

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathscr{C}^1$-Kurve, so ist γ rektifizierbar mit

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t.$$

Definition. Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi\colon J \to I$ ein Homöomorphismus, so ist $\gamma \circ \varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\operatorname{im}(\gamma \circ \varphi) = \operatorname{im}\gamma$. φ heißt *Parametertransformation.* φ heißt *orientierungserhaltend*, wenn φ monoton wachsend, und *orientierungsumkehrend*, wenn φ monoton fallend ist.

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar, so ist auch $\gamma \circ \varphi$ für jede Parametertransformation φ rektifizierbar mit $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.

Definition. Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls $\gamma|[a, b]$ für jedes $[a, b] \subseteq I$ rektifizierbar mit $L(\gamma|[a, b]) = b - a$ ist.

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre $\mathscr{C}^1$-Kurve, so existiert eine Parametrisierung nach Bogenlänge: Setze

$$\psi(t) = L(\gamma|[a,t]) = \int_a^t \underbrace{\|\gamma'(s)\|_2}_{>0} \,\mathrm{d}s.$$

Dann ist $\psi'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 > 0$, also ψ streng monoton wachsend mit $\psi(a) = 0$ und $\psi(L) = L(\gamma)$. Also ist $\varphi := \psi^{-1}\colon [0, L(\gamma)] \to [a,b]$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Es gilt

$$(\gamma \circ \varphi)'(\tau) = \gamma'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) = \frac{\gamma'(\varphi(\tau))}{\psi'(\varphi(\tau))} = \frac{\gamma'(\varphi(\tau))}{\|\gamma'(\varphi(\tau))\|_2},$$

also folgt

$$L((\gamma \circ \varphi)|[\tau_0, \tau_1]) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|(\gamma \circ \varphi)'(\tau)\|_2 \,\mathrm{d}\tau = \tau_1 - \tau_0$$

für alle $[\tau_0, \tau_1] \subseteq [a,b]$. Insbesondere gilt: Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Kurve, so ist $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in [a,b]$.

Definition. Eine nichtkonstante Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt *periodisch*, falls ein $T > 0$ existiert mit $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die kleinste solche Zahl heißt *Periode* von γ. Eine periodische Kurve heißt auch *geschlossen*. Ist γ periodisch mit Periode $T > 0$ und $\gamma|[0,T)$ injektiv, so heißt γ *einfach geschlossen*.

1.2 Ebene Kurven

Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ heißt *ebene Kurve*. Ab jetzt sei γ eine reguläre $\mathscr{C}^2$-Kurve. $v(t) := \gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ heißt *Geschwindigkeitsvektor*, $n(t) := Jv(t)$ mit $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in SO(2)$ heißt *Normalenvektor*. Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\|v(t)\|_2 = \|n(t)\|_2 = 1$. Weiterhin gilt in diesem Fall

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle.$$

Also ist $\gamma''(t) \perp \gamma'(t)$ für alle $t \in I$ und es existiert genau ein $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ mit $\gamma''(t) = \kappa(t)n(t)$.

Definition. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte (also auch reguläre) $\mathscr{C}^2$-Kurve. Die oben definierte Zahl $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ heißt *Krümmung von γ in $t \in I$*. Die Funktion $\kappa\colon I \to \mathbb{R}, t \mapsto \kappa(t)$ heißt *Krümmung von γ*.

Beispiel. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma_0 + tv_0$ mit $\gamma_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\|v_0\|_2 = 1$. Dann gilt $\gamma'(t) = v_0$ und $\gamma''(t) = 0$ für $t \in [a,b]$ und wegen $\|v_0\|_2 = 1$ ist γ nach Bogenlänge parametrisiert. Also gilt $\kappa = 0$.

Beispiel. Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto R\left(\cos\frac{t}{R}, \sin\frac{t}{R}\right)$ die Kreislinie mit Radius $R > 0$, also periodisch mit Periode $2\pi R$. Dann gilt $\gamma'(t) = \left(-\sin\frac{t}{R}, \cos\frac{t}{R}\right)$, also $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ und γ ist nach Bogenlänge parametrisiert. Weiter gilt $\gamma''(t) = \frac{1}{R}\left(-\cos\frac{t}{R}, -\sin\frac{t}{R}\right)$ und $n(t) = \left(-\cos\frac{t}{R}, -\sin\frac{t}{R}\right)$. Also ist $\gamma''(t) = \frac{1}{R}n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $\kappa = \frac{1}{R}$.

Definition. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve. Dann heißt $(e_1(t), e_2(t)) := (v(t), n(t))$, $t \in I$, *begleitendes 2-Bein.*

Bemerkung. $(e_1(t), e_2(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ für alle $t \in I$.

Satz (Frenet-Gleichungen für $n = 2$)**.** *Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve. Dann gilt für $t \in I$:*

$$\begin{pmatrix} v'(t) \\ n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) \\ -\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \end{pmatrix}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist gerade die Definition der Krümmung. Wegen

$$n'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(Jv(t)) = Jv'(t) = \kappa(t)Jn(t) = \kappa(t)J^2v(t) = -\kappa(t)v(t)$$

folgt die zweite Gleichung. □

Sei $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orientierungserhaltende Bewegung, d.h. $\phi(x) = Ax + b$ für $A \in SO(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve. Dann ist auch $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert und die Krümmung $\tilde{\kappa}$ von $\tilde{\gamma}$ ist gleich der Krümmung κ von γ. Kurz gesagt ist die Krümmung einer ebenen Kurve invariant unter orientierungserhaltenden Bewegungen, denn es gilt $\tilde{\gamma}' = (\phi \circ \gamma)' = A\gamma'$, $\tilde{\gamma}'' = A\gamma''$ und $\tilde{n} = J\tilde{v} = JAv = An$, also $\tilde{v}' = Av' = \kappa An = \kappa\tilde{n}$.

Satz (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie für $n = 2$)**.** *Sei $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ mit Krümmung κ. Diese ist bis auf Komposition mit orientiertungserhaltenden Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $t_0 \in I$ beliebig und setze

$$\Theta(t) = \int_{t_0}^{t} \kappa(s)\,\mathrm{d}s$$

und für $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\|_2 = 1$ sei

$$v(t) = \begin{pmatrix} \cos\Theta(t) & -\sin\Theta(t) \\ \sin\Theta(t) & \cos\Theta(t) \end{pmatrix} v_0.$$

Schließlich sei für $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dann ist γ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve mit $\gamma' = v$ und

$$\gamma''(t) = v'(t) = \kappa(t) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\Theta(t) & -\cos\Theta(t) \\ \cos\Theta(t) & -\sin\Theta(t) \end{pmatrix} v_0}_{Jv(t)} = \kappa(t)n(t)$$

für alle $t \in I$. Also besitzt γ die Krümmung κ. Ist $\tilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine weitere nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ und $\tilde{v}(0) = v_0$, so gilt für $f(t) = \frac{1}{2}\|v(t) - \tilde{v}(t)\|^2$:

$$f'(t) = \langle v'(t) - \tilde{v}'(t), v(t) - \tilde{v}(t)\rangle = \kappa(t)\langle J(v(t) - \tilde{v}(t)), v - \tilde{v}(t)\rangle = 0$$

und

$$f(0) = \frac{1}{2}\|v(0) - \tilde{v}(0)\|^2 = 0.$$

Also ist $f = 0$, d.h. $v(t) = \tilde{v}(t)$ für alle $t \in I$, also auch $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in I$. Da es zu $\gamma_0, \tilde{\gamma}_0 \in \mathbb{R}^2$, bzw. $v_0, \tilde{v}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|v_0\| = \|\tilde{v}_0\| = 1$, genau eine orientierungserhaltende Bewegung $\phi(x) = Ax + b$ gibt mit $Av_0 = \tilde{v}_0$ und $\gamma_0 + b = \tilde{\gamma}_0$ folgt die Behauptung. $\square$

Wir haben im Beweis gesehen: Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve, so ist für $\Theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $v_0 = \left(\begin{smallmatrix}\cos\Theta_0\\ \sin\Theta_0\end{smallmatrix}\right)$ (Θ_0 ist eindeutig mod $2\pi\mathbb{Z}$) durch

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa(s)\,\mathrm{d}s$$

eine Funktion $\Theta\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben, die mod $2\pi\mathbb{Z}$ den orientierten Winkel zwischen $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ und $v(t)$ angibt. Es gilt also für $t \in I$

$$v(t) = \begin{pmatrix}\cos\Theta(t)\\ \sin\Theta(t)\end{pmatrix}.$$

Allgemeiner gilt:

Lemma. *Sei $v\colon I \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig. Sei $t_0 \in I$ und $v_0 = v(t_0)$. Dann existiert stetiges $\Theta\colon I \to \mathbb{R}$ mit $v(t) = \left(\begin{smallmatrix}\cos\Theta(t)\\ \sin\Theta(t)\end{smallmatrix}\right)$ für alle $t \in I$. Die Funktion Θ ist eindeutig bis auf Addition einer Konstanten aus $2\pi\mathbb{Z}$.*

Beweisskizze. Sei $\Theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $v_0 = \left(\begin{smallmatrix}\cos\Theta_0\\ \sin\Theta_0\end{smallmatrix}\right)$. Gesucht ist ein stetiges $\Theta\colon I \to \mathbb{R}$ mit

i) $\Theta(t_0) = \Theta_0$

ii) $\pi \circ \Theta = v$

wobei $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1, \Theta \to \left(\begin{smallmatrix}\cos\Theta\\ \sin\Theta\end{smallmatrix}\right)$. Es sei $\pi_k = \pi|I_k\colon I_k \to \pi(I_k) =: J_k$ mit $I_k = \left(\frac{k}{2}\pi, \left(\frac{k}{2}+1\right)\pi\right)$. Dann ist π_k ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung $s_k\colon J_k \to I_k$, Weiterhin gilt

$$J_k = \begin{cases} S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\} & \text{für } k \equiv 0 \pmod 4\\ S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < 0\} & \text{für } k \equiv 1 \pmod 4\\ S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < 0\} & \text{für } k \equiv 2 \pmod 4\\ S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\} & \text{für } k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Die I_k (bzw. J_k) überdecken $\mathbb{R}$ (bzw. S^1). Es gibt also ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit $\Theta_0 \in I_{k_0}$ und $v_0 \in J_{k_0}$. Da v stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $v([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I) \subseteq I_{k_0}$. Die Funktion $\Theta|[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$ ist also eindeutig gegeben durch

$$\Theta|[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I := s_{k_0} \circ v|[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I.$$

Führe die gleiche Konstruktion für die Randpunkte durch. Man erhält

$$\tilde{I} = \bigcup_{\substack{t_0 \in [a,b] \subseteq I \\ \Theta|[a,b] \text{ definiert}}} [a, b] \subseteq I$$

ist offen, abgeschlossen und nichtleer. Also ist $\tilde{I} = I$. $\square$

Definition. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt sternförmig bezüglich $x_0 \in T$, falls mit $x \in T$ immer auch die Strecke $[x_0, x] = \{tx_0 + (1-t)x : t \in [0, 1]\}$ in T liegt.

Lemma. *Ist $T \subseteq \mathbb{R}^2$ sternförmig bezüglich $x_0 \in T$ und $v: T \to S^1$ stetig, $v_0 = v(x_0)$, so existiert ein stetiges $\Theta: T \to \mathbb{R}$ mit $v(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\Theta(t) \\ \sin\Theta(t) \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in T$. Θ ist eindeutig bis auf Addition einer Konstante in $2\pi\mathbb{Z}$.*

Beweis. Wähle $\Theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $v_0 = \left(\begin{smallmatrix} \cos\Theta_0 \\ \sin\Theta_0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist Θ mit $\Theta(x_0) = \Theta_0$ durch Lemma 1 eindeutig auf allen Strecken $[x_0, x] \subseteq T$ festgelegt, insbesondere ist Θ auf allen $x \in T$ festgelegt. Zu zeigen bleibt, dass das so definierte $\Theta: T \to \mathbb{R}$ stetig ist. Sei $x \in T$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $v(x) \in J_k$ und $\Theta(x) \in I_k$. Da v stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $v(B_\delta(x) \cap T) \subseteq J_k$. Dann gilt $\Theta|B_\delta(x) \cap T = s_k \circ v|B_\delta(x) \cap T$. Insbesondere ist Θ stetig in x. $\square$

Sei $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, reguläre $\mathscr{C}^1$-Kurve mit Periode $T > 0$. Sei $\Theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion für den normierten Geschwindigkeitsvektor, d.h.

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} \cos\Theta(t) \\ \sin\Theta(t) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\omega(\gamma) := \frac{1}{2\pi}(\Theta(T) - \Theta(0)) \in \mathbb{Z}.$$

$\omega(\gamma)$ heißt *Windungszahl* der geschlossenen, regulären $\mathscr{C}^1$-Kurve $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. $\omega(\gamma)$ beschreibt die Anzahl der vollen Drehungen von $v(t)$ gegen den Uhrzeigersinn.

Bemerkung. Ist γ eine geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve mit Periode $T > 0$, so gilt

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \kappa(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung. Ist γ eine geschlossene, reguläre $\mathscr{C}^1$-Kurve mit Periode $T > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$ wieder eine solche Kurve und es gilt $\omega(\gamma) = \omega(\tilde{\gamma})$, denn eine Winkelfunktion für $\tilde{v}(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}$ ist gegeben durch $\tilde{\Theta}(t) = \Theta(t + t_0)$.

Bemerkung. Sei γ wie oben und $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$. Dann ist $\omega(\gamma) = -\omega(\tilde{\gamma})$.

Bemerkung. Ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^1$-Parametertransformation mit $\varphi(t+T) = \varphi(t) + T$, so gilt für $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$:

$$\omega(\tilde{\gamma}) = \begin{cases} \omega(\gamma) & \text{für orientierungserhaltendes } \varphi \\ -\omega(\gamma) & \text{für orientierungsumkehrendes } \varphi \end{cases}$$

Satz (Umlaufsatz)**.** *Ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine* einfach *geschlossene, reguläre $\mathscr{C}^1$-Kurve, so gilt $\omega(\gamma) \in \{\pm 1\}$.*

Beweis. Sei $T > 0$ die Periode von γ. Sei $x_0 = \max\{\gamma_1(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ und durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation können wir annehmen, dass $\gamma_1(0) = x_0$. Weiter können wir annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist und $\gamma'(0) = e_2$ gilt (möglicherweise durch eine orientierungsumkehrende Parametertransformation). Sei G die Gerade, die durch $s \mapsto \gamma(0) + se_1$ parametrisiert wird. Auf dem positiven Halbstrahl liegen keine Punkte von γ $(*)$. Wir setzen

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq y \leq T\}.$$

Dann ist X konvex, also sternförmig. Wir betrachten die stetige Abbildung $v\colon X \to S^1$ mit

$$v(x, y) = \begin{cases} \frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{\|\gamma(y)-\gamma(x)\|} & x < y, (x, y) \neq (0, T) \\ \gamma'(t) & x = y = t \\ -\gamma'(0) & (x, y) = (0, T) \end{cases}$$

Wähle eine Winkelfunktion $\Theta\colon X \to \mathbb{R}$ gemäß Lemma 2, d.h. $v(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\Theta(x,y) \\ \sin\Theta(x,y) \end{smallmatrix}\right)$ für alle $(x, y) \in X$. Insbesondere gilt also $\gamma'(t) = v(t, t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\Theta(t,t) \\ \sin\Theta(t,t) \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, T]$, d.h.

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\Theta(T, T) - \Theta(0, 0)) = \frac{1}{2\pi}(\Theta(T, T) - \Theta(0, T) + \Theta(0, T) - \Theta(0, 0)).$$

Es gilt $\Theta(0, T) - \Theta(0, 0) = \pi$ und $\Theta(T, T) - \Theta(0, T) = \pi$, denn sei ohne Einschränkung $\Theta(0, 0) = \frac{\pi}{2}$. Wegen $(*)$ liegt e_1 nicht im Bild von $t \mapsto v(0, t)$, d.h. $2\pi\mathbb{Z}$ liegt nicht im Bild von $t \mapsto \Theta(0, t)$. Weiterhin gilt $\Theta(0, T) \in \frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Da Θ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz $\Theta(0, T) = \frac{3\pi}{2}$, also $\Theta(0, T) - \Theta(0, 0) = \pi$. Wegen $\Theta(T, T) \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ und wegen $(*)$ liegt $-e_1$ nicht im Bild von $t \mapsto v(t, T)$, d.h. $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ liegt nicht im Bild von $t \mapsto \Theta(T, t)$. Also ist $\Theta(T, T) = \frac{5\pi}{2}$, also folgt $\Theta(T, T) - \Theta(0, T) = \pi$. Damit folgt die Behauptung. □

Korollar. *Ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve mit Periode $T > 0$, so gilt*

$$\int_0^T \kappa(t) \, \mathrm{d}t \in \{\pm 2\pi\}.$$

Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und $t_0 \in I$. Ist dann $\kappa(t_0) > 0$, so liegt $\gamma(t)$ für t nahe t_0 links der Tangente an $\gamma(t_0)$, denn nach Taylor gilt

$$\begin{aligned}\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0)\rangle &= \langle \gamma(t_0) - \gamma(t_0), n(t_0)\rangle + \langle \gamma'(t_0), n(t_0)\rangle(t - t_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\langle \gamma''(t_0), n(t_0)\rangle(t-t_0)^2 + o(|t-t_0|^2) = \\ &= \frac{1}{2}\kappa(t_0)(t-t_0)^2 + o(|t-t_0|^2) > 0\end{aligned}$$

für t nahe t_0. Analog liegt $\gamma(t)$ für $\kappa(t_0) < 0$ für t nahe t_0 rechts der Tangente an $\gamma(t_0)$.

Definition. Eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, falls gilt: $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lemma. *Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^2$-Kurve. Dann gilt:*

1. *Ist $\kappa > 0$, so liegt $\gamma(t)$ links der Tangente an $\gamma(t_0)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$.*
2. *Ist $\kappa < 0$, so liegt $\gamma(t)$ rechts der Tangente an $\gamma(t_0)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$.*

Beweis. Sei $\kappa > 0$ und $T > 0$ die Periode von γ. Angenommen,

$$f(t_1) := \langle \gamma(t_1) - \gamma(t_0), n(t_0)\rangle = 0$$

für $t_1 \in [0, T)$, $t_1 \neq t_0$. Dann existiert $t_- \in [0,T) \setminus \{t_0\}$ mit $f'(t_-) = 0$ und $t_+ \in [0,T) \setminus \{t_0, t_-\}$ mit $f'(t_+) = 0$. Natürlich gilt $f'(t_0) = 0$. Unter den 3 Vektoren $\gamma'(t_-), \gamma'(t_0)$ und $\gamma'(t_+)$ zeigen also mindestens 2 in die gleiche Richtung, d.h. es existieren $t' \neq t'' \in \{t_-, t_0, t_+\}$ mit $\gamma'(t') = \gamma'(t'')$. Es sei ohne Einschränkung $0 = t' < t'' < T$. Sei $\Theta(t)$ eine Winkelfunktion für $v(t) = \gamma'(t)$. Wegen $\Theta' = \kappa > 0$ ist Θ streng monoton wachsend, also

$$2\pi\omega(\gamma) = \Theta(T) - \Theta(0) = \Theta(T) - \Theta(t'') + \Theta(t'') - \Theta(0) = 2\pi k + 2\pi l$$

mit $k, l \geq 1$, was unmöglich ist. □

Definition. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^3$-Kurve. Ein $t_0 \in I$ heißt Scheitel von γ, falls $\kappa'(t_0) = 0$. Insbesondere sind lokale Extrema von κ Scheitel von γ.

Satz (Vierscheitelsatz)**.** *Eine konvexe $\mathscr{C}^3$-Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ hat mindestens 4 Scheitel.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\kappa > 0$ und κ habe ein Minimum in $t = 0$ und ein Maximum in $t = t_0$, $0 < t_0 < T$, mit der Periode $T > 0$ von γ. Weiterhin können wir erreichen, dass $\gamma(0) = 0$ und die Strecke von $\gamma(0)$ nach $\gamma(t_0)$ auf der positiven x-Achse liegt. Schreibe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, also $x(0) = y(0) = 0$ und $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, 0)$ für $x_0 > 0$. Es gilt $y(t) < 0$ für $0 < t < t_0$, denn $(x_0, 0)$ liegt links der Tangente an $\gamma(0)$, also $y'(0) < 0$. Also ist $y(t) < 0$ für kleine $t > 0$. Wäre $y(t) = 0$ für ein $0 < t < t_0$, so lägen $\gamma(0)$, $\gamma(t)$ und $\gamma(t_0)$ auf einer Geraden, was ein Widerspruch zur Konvexität von γ ist. Genauso zeigt man $y(t) > 0$ für $t_0 < t < T$.

Wären 0 und t_0 die einzigen Scheitel, so wäre $\kappa'(t) > 0$ für alle $0 < t < t_0$ und $\kappa'(t) < 0$ für alle $0 < t < T$. Also wäre $y(t)\kappa'(t) < 0$ für $t \neq 0, t_0$. Es gilt

$$\int_0^T y(t)\kappa'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T y'(t)\kappa(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T x''(t)\,\mathrm{d}t = x'(T) - x'(0) = 0$$

was ein Widerspruch zu $y\kappa' < 0$ fast überall ist. Es muss also ein weiterer Scheitel t_1 existieren, etwa $0 < t_1 < t_0$. Die Annahme, dass t_1 der einzige weitere Scheitel von γ ist, impliziert, dass $\kappa'|_{(0,t_1)\cup(t_1,t_0)} > 0$, also

$$0 = \int_0^T y(t)\kappa'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} y(t)\kappa'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^T y(t)\kappa'(t)\,\mathrm{d}t < 0.$$

Also existiert ein vierter Scheitel auf $(0, t_0)$ oder (t_0, T). □

Beispiel. Die Kreislinie mit Radius $R > 0$ hat Krümmung $\frac{1}{R}$, also sind alle Parameterwerte Scheitel.

Beispiel. Die Ellipse mit Halbachsen $a \neq b$, $a, b > 0$:

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$$

hat 4 Scheitel in $[0, 2\pi)$: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Beispiel. Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ regulär, aber nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisiert, und $\varphi\colon J \to I$ eine Parametertransformation, so dass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Dann gilt

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) & \gamma_1''(t) \\ \gamma_2'(t) & \gamma_2''(t) \end{pmatrix}$$

1.3 Raumkurven

Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ heißt *Raumkurve*. Sei jetzt im Folgenden γ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^3$-Kurve.

Definition. Die *Krümmung* $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ von $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$.

Bemerkung. Wie im ebenen Fall gilt für alle $t \in I$:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 2\langle\gamma''(t), \gamma'(t)\rangle$$

Das heißt $\gamma'' \perp \gamma'$.

Definition. $v(t) = \gamma'(t)$ heißt *Geschwindigkeitsvektor* und im Falle $\kappa(t) > 0$ heißt $n(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$ *Normalenvektor* und $b(t) = v(t) \times n(t)$ *Binormalenvektor* von γ in $t \in I$.

Definition. Für $t \in I$ heißt $\big(e_1(t), e_2(t), e_3(t)\big) = \big(v(t), n(t), b(t)\big)$ das *begleitende Dreibein* von γ in t.

Bemerkung. Für $t \in I$ mit $\kappa(t) > 0$ ist $\big(e_1(t), e_2(t), e_3(t)\big)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung. Für $t \in I$ mit $\kappa(t) > 0$ gilt $\langle v'(t), n(t)\rangle = \langle \gamma''(t), n(t)\rangle = \kappa(t)$. Anschaulich misst die Krümmung, wie stark v in Richtung von n abkippt.

Definition. Für $t \in I$ mit $\kappa(t) > 0$ heißt $\tau(t) = \langle n'(t), b(t)\rangle \in \mathbb{R}$ die *Torsion* von γ in t.

Beispiel. Ist $(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^3$-Kurve, so ist durch $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, 0)$ eine Raumkurve definiert. Es gilt $\tilde{v} = \tilde{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2', 0)$ und $\tilde{\gamma}'' = (\gamma_1'', \gamma_2'', 0)$, also ist $\tilde{n} = (\pm n, 0)$, falls $\tilde{\kappa}(t) > 0$, und $\tilde{\kappa} = |\kappa|$. Weiterhin gilt $\tilde{b}(t) = e_3(t)$ und $\tilde{n}'(t) = (\pm n'(t), 0)$, also $\tilde{\tau}(t) = 0$ für alle $t \in I$ mit $\tilde{\kappa}(t) > 0$.

Beispiel. Die Schraubenlinie ist definiert durch $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \big(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\big)$. Also ist $\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \cos\frac{t}{\sqrt{2}}, 1\big)$ und $\|\gamma'(t)\|^2 = 1$. Also ist γ nach Bogenlänge parametrisiert. Weiter ist $\gamma''(t) = \frac{1}{2}\big(-\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{t}{\sqrt{2}}, 0\big)$, also $\kappa(t) = \|\gamma''(t)\| = \frac{1}{2}$ und $n(t) = \big(-\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{t}{\sqrt{2}}, 0\big)$. Weiterhin ist $b(t) = v(t) \times n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin\frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, 1\big)$, und $n'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin\frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, 0\big)$, also $\tau(t) = \langle n'(t), b(t)\rangle = \frac{1}{2}$.

Bemerkung. Ist $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orientierungserhaltende Bewegung und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^3$-Kurve, dann gilt für $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma$: $\tilde{\kappa} = \kappa$ und $\tilde{\tau} = \tau$.

Satz (Frenetgleichungen). *Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathscr{C}^3$-Kurve mit $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Dann gilt für alle $t \in I$:*

$$\begin{pmatrix} v'(t) \\ n'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Beweis. $v'(t) = \kappa(t)n(t)$ ist klar. Da $v(t), n(t), b(t)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist, gilt

$$\begin{aligned} n'(t) &= \langle n'(t), v(t)\rangle v(t) + \langle n'(t), n(t)\rangle n(t) + \langle n'(t), b(t)\rangle b(t) = \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle n(t), v(t)\rangle - \langle n(t), v'(t)\rangle\right) v(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle n(t), n(t)\rangle\right) n(t) + \tau(t)b(t) \\ &= -\kappa(t)v(t) + \tau(t)b(t) \end{aligned}$$

Genauso gilt

$$\begin{aligned} b'(t) &= \langle b'(t), v(t)\rangle v(t) + \langle b'(t), n(t)\rangle n(t) + \langle b'(t), b(t)\rangle b(t) = \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle b(t), v(t)\rangle - \langle b(t), v'(t)\rangle\right) v(t) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle b(t), n(t)\rangle - \langle b(t), n'(t)\rangle\right) n(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle b(t), b(t)\rangle\right) b(t) = \\ &= 0 + (0 - \langle b(t), -\kappa(t)v(t) + \tau(t)b(t)\rangle)n(t) = -\tau(t)n(t) \end{aligned}$$

□

Satz (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie für $n = 3$)**.** *Seien* $\kappa\colon I \to \mathbb{R}_{>0}$, $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte* $\mathscr{C}^3$*-Kurve* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ *mit Krümmung* κ *und Torsion* τ*. Diese ist bis auf Komposition mit orientierungserhaltenden Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Beweis. Betrachte das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ v'(t)\\ n'(t)\\ b'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \kappa(t) & 0\\ 0 & -\kappa(t) & 0 & \tau(t)\\ 0 & 0 & -\tau(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma(t)\\ v(t)\\ n(t)\\ b(t)\end{pmatrix}$$

Sei $t_0 \in I$. Existenz- und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche (lineare) Differentialgleichung liefern: Es existiert genau eine Lösung (γ, v, n, b) auf I mit $\gamma(t_0) = 0$, $v(t_0) = e_1$, $n(t_0) = e_2$ und $b(t_0) = e_3$. Aus den Frenetgleichungen folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\langle v,v\rangle\\ \langle n,n\rangle\\ \langle b,b\rangle\\ \langle b,v\rangle\\ \langle b,n\rangle\\ \langle n,v\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\kappa\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau & 2\kappa\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\tau & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & -\tau\\ 0 & -\tau & \tau & -\kappa & 0 & 0\\ -\kappa & \kappa & 0 & \tau & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle v,v\rangle\\ \langle n,n\rangle\\ \langle b,b\rangle\\ \langle b,v\rangle\\ \langle b,n\rangle\\ \langle n,v\rangle\end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Es gilt für $e_1 = v$, $e_2 = n$ und $e_3 = b$: $\langle e_i(t_0), e_j(t_0)\rangle = \delta_{ij}$. Nun löst $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in I$ die Differentialgleichung $(*)$, also ist $(v(t), n(t), b(t))$ für alle $t \in I$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Es gilt $\det(v(t_0), n(t_0), b(t_0)) > 0$, also wegen Stetigkeit auch $\det(v(t), n(t), b(t)) > 0$ für alle $t \in I$, d.h. $(v(t), n(t), b(t))$ ist sogar positiv orientiert für alle $t \in I$. Also ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert mit begleitendem Dreibein $(v(t), n(t), b(t))$, der Krümmung κ und der Torsion τ.

Ist $\tilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine weitere nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ und Torsion γ und begleitendem Dreibein $(\tilde{v}, \tilde{n}, \tilde{b})$, so existiert eine orientierungserhaltende Bewegung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x) = Ax + b$, $A \in SO(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$ mit $Av(t_0) = \tilde{v}(t_0)$, $An(t_0) = \tilde{n}(t_0)$, $Ab(t_0) = \tilde{b}(t_0)$ und $-b = \tilde{\gamma}(t_0)$. Damit folgt $\tilde{\gamma} = A \circ \gamma$. ☐

2 Lokale Flächentheorie

2.1 Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$

Definition. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* der Klasse $\mathscr{C}^k$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es für jedes $p \in M$ offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und einen $\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismus $\phi\colon U \to V$ gibt mit $\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Anschaulich ist M “lokal flach”. ϕ heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* von M um p, und $\varphi = \phi|_{U\cap M}\colon U \cap M \to V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ heißt *Karte* von M um p.

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $\phi\colon U \to V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte um p. Dann heißt der lineare Unterraum $\big(D\phi(p)\big)^{-1}(\mathbb{R}^m)$ *Tangentialraum* von M an p und wird mit T_pM bezeichnet. Schreibt man $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$

und sind e_i, $i = 1, \dots, m$ die ersten m Einheitsvektoren, so wird T_pM von $\big(D\phi(p)\big)^{-1}e_i$, $i = 1, \dots, m$, aufgespannt.

Bemerkung (Geometrische Beschreibung des Tangentialraums). Es gilt

$$T_pM = \{\gamma'(0)\colon \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = p\},$$

denn sei $v \in T_pM$. Betrachte $x = \big(D\phi(p)\big)v \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Dann ist $v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \phi^{-1}(\phi(p) + tx)$ und $\phi^{-1}(\phi(p) + tx) \in M$ für genügend kleine t. Ist andersherum $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$, so gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \phi(\gamma(t)) = w \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$, also $\gamma'(0) = \big(D\phi(p)\big)^{-1}w \in T_pM$.

Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Es sind äquivalent:*

1. *M ist eine m-dimensionale $\mathscr{C}^k$-Untermannigfaltigkeit.*
2. *Für alle $p \in M$ existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$, und $F\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ der Klasse $\mathscr{C}^k$, $F = (f_1, \dots, f_{n-m})$, mit $DF(x)$ surjektiv für alle $x \in U$ (d.h. $(\operatorname{grad} f_i)(x)$ sind linear unabhängig), so dass $U \cap M = F^{-1}(0)$. Eine $\mathscr{C}^k$-Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ mit $DF(x)$ surjektiv für alle $x \in U$ heißt* Submersion.
3. *Für alle $p \in M$ existieren offene $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in V$ und $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathscr{C}^k$ mit*
   (i) $DF(x)$ ist injektiv für alle $x \in U$.
   (ii) $V \cap M = F(U)$.
   (iii) $F\colon U \to V \cap M$ ist ein Homöomorphismus.

   Eine $\mathscr{C}^k$-Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit (i), (ii) und (iii) heißt lokale Parametrisierung *von M.*

Beweis.

$1 \Rightarrow 2$ Gegeben einen Diffeomorphismus $\phi\colon U \to V$ und $\phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^m$, schreibe $\phi = (f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n)$ und setze $F = (f_{m+1}, \dots, f_n)$. Für $x \in U$ gilt dann $F(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in M$, und

$$D\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(x) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar für alle $x \in U$, insbesondere sind $\operatorname{grad} f_{m+1}(x), \dots, \operatorname{grad} f_n(x)$ linear unabhängig.

$2 \Rightarrow 1$ Sei $F\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ gegeben mit $F^{-1}(0) = U \cap M$ und $DF(x)$ surjektiv für alle $x \in U$. Ohne Einschränkung seien $DF(p)e_i$, $i = m+1, \dots, n$, linear unabhängig. Setze $\phi(x) = (x_1, \dots, x_m, F(x))$. Dann ist

$$D\phi(x) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{DF(x)} \end{array}\right)$$

invertierbar, also existieren offene $U' \subseteq U$, $V' \subseteq \mathbb{R}^n$ so dass $\phi|_{U'}\colon U' \to V'$ ein Diffeomorphismus ist. Weiterhin gilt $\phi(U' \cap M) = V' \cap \mathbb{R}^m$.

1 ⇒ 3 Gegeben sei ein Diffeomorphismus $\phi\colon U \to V$ mit $\phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^m$. Setze $\varphi = \phi|_{U\cap M}\colon U' = U \cap M \to V \cap \mathbb{R}^m = V'$ und $F = \phi^{-1}|_{V'}\colon V' \to U'$. Dann gilt $F = \varphi^{-1}$, d.h. $F\colon V' \to U'$ Homöomorphismus. Weiterhin ist

$$D\phi^{-1}(x) = \left(\begin{array}{c|c} DF(x) & * \end{array} \right)$$

invertierbar nach Voraussetzung. Insbesondere $DF(x)e_i$, $i = 1, \dots, m$ linear unabhängig, d.h. $DF(x)$ injektiv.

3 ⇒ 1 Gegeben sei eine lokale Parametrisierung $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ von M um p. Sei $F(x_0) = p$. Ohne Einschränkung sei $DF(x_0)e_i = e_i$, $i = 1, \dots, m$, inbesondere $DF(x_0)(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^m$. Setze $\psi(x) = F(x_1, \dots, x_m) + (0, \dots, 0, x_{m+1}, x \dots, x_n)$ mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, d.h. $\psi\colon U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$D\psi(x_0) = \left(\begin{array}{c|c} DF(x_0) & 0 \\ \hline 0 & E_{m-n} \end{array} \right)$$

d.h. $DF(x_0)$ ist invertierbar. Also existieren nach dem lokalen Umkehrsatz offene $U', V' \subseteq \mathbb{R}^n$, $(x_0, 0) \in U'$, $p \in V'$, so dass $\psi|_{U'}\colon U' \to V'$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\phi\colon V' \to U'$ die Umkehrabbildung. Dann gilt $\phi(V' \cap M) = U' \cap \mathbb{R}^m$, denn zu $y \in V' \cap M$ existiert genau ein $(x_1, \dots, x_m)$ mit $F(x_1, \dots, x_m) = y$, d.h. $y = \psi(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, d.h. $\phi(y) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. □

Bemerkung. Die Halbstetigkeit des Ranges impliziert für $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ mit $DF(x_0)$ surjektiv, dass $DF(x)$ für x in einer Umgebung von x_0 surjektiv ist, und für $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit $DF(x_0)$, dass $DF(x)$ für x in einer Umgebung von x_0 injektiv ist.

Bemerkung. $T_pM = (D\phi(x))^{-1}(\mathbb{R}^m)$ für eine Untermannigfaltigkeitskarte $\phi\colon U \to V$ um p. Im Falle der Charakterisierung 2 aus Satz 1 gilt $T_pM = \ker DF(p)$ und im Falle der Charakterisierung 3 gilt $T_pM = \operatorname{im} DF(x_0)$.

Bemerkung. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ differenzierbar von der Klasse $\mathscr{C}^k$, dann ist $\operatorname{Graph} f$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, denn $F\colon U \to \operatorname{Graph} f, x \mapsto (x, f(x))$ ist ein Homöomorphismus mit

$$DF(x) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline DF(x)e_1 & \dots & DF(x)e_n \end{array} \right)$$

injektiv.

Bemerkung. Untermannigfaltigkeiten sind lokal als Graph darstellbar.

2.2 Flächen

Definition. Eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ heißt (eingebettete) *Fläche.*

Konvention. Untermannigfaltigkeiten seien ab jetzt Untermannigfaltigkeiten der Klasse $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und differenzierbar heiße $\mathscr{C}^k$.

Beispiel. $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Fläche, denn betrachte $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2 - 1$. Dann ist $S^2 = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{grad} f(x) = 2x$ für $x \in \mathbb{R}^3$, also $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$. Weiterhin gilt $T_pS^2 = \ker Df(p) = \operatorname{grad} f(p)^\perp = p^\perp$.

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Eine Abbildung $f\colon W \to S, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt *differenzierbar*, falls f aufgefasst als Abbildung $f\colon W \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar um* $p \in S$, falls ein offenes $W \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p \in W$ und ein differenzierbares $\tilde{f}\colon W \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{f}|_{W\cap S} = f|_{W\cap S}$ existiert. f heißt *differenzierbar*, falls f um alle $p \in S$ differenzierbar ist.

Bemerkung. Sei $p \in S$ und $F\colon U \to V \cap S$ lokale Parametrisierung um p. Dann ist F differenzierbar und $F^{-1}\colon V \cap S \to U$ ist differenzierbar um p.

Bemerkung. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $W \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Dann ist $W \cap S$ eine Fläche. Nach Satz 1.1 existiert ein Diffeomorphismus $\phi\colon W \to \phi(W)$ mit $p \in W$, $W \cap S \subseteq V \cap S$, so dass $\phi|_{W\cap S}(x) = (F^{-1}|_{W\cap S}(x), 0)$. Dann ist $F^{-1}|_{W\cap S} = \phi_{\mathbb{R}^2} \circ \phi|W \cap S$, d.h. $\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \phi|_W\colon W \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar.

Bemerkung. Ist $p \in S$ und sind $F_i\colon U_i \to V_i \cap S$, $i = 1, 2$, zwei lokale Parametrisierungen um p, d.h. $p \in V_1 \cap V_2$, so ist der *Parametrisierungswechsel* $F_2^{-1} \circ F_1|_{F_1^{-1}(V_1\cap V_2)}\colon F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ein Diffeomorphismus.

Satz. *Für $f\colon W \to S$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sind äquivalent:*

1. *f ist differenzierbar um $x_0 \in W$.*
2. *Es gibt eine lokale Parametrisierung $F\colon U \to V \cap S$ um $p = f(x_0)$, so dass $F^{-1} \circ f|_{f^{-1}(V)}$ differenzierbar um x_0 ist.*
3. *Für alle lokalen Parametrisierungen $F\colon U \to V \cap S$ um p ist $F^{-1} \circ f|_{f^{-1}(V)}$ differenzierbar um x_0.*

Beweis.

$1 \Rightarrow 3$ Für jede lokale Parametrisierung F um p ist $F^{-1}\colon V \cap S \to S$ differenzierbar um p, also ist $f \circ F^{-1}|_{f^{-1}(V)}$ differenzierbar um x_0.

$3 \Rightarrow 2$ Ist klar.

$2 \Rightarrow 1$ $f|_{f^{-1}(V)} = F \circ F^{-1} \circ f|_{f^{-1}(V)}$ ist differenzierbar um x_0. □

Lemma. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Für eine Abbildung $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

1. *f ist differenzierbar um $p \in S$.*
2. *Es existiert eine lokale Parametrisierung $F\colon U \to S \cap V$ um p, so dass $f\colon F\colon U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar um $x_0 = F^{-1}(p)$ ist.*
3. *Für alle lokalen Parametrisierungen F um p ist $f \circ F$ differenzierbar um x_0.*

Beweis.

$1 \Rightarrow 3$ Nach Voraussetzung existiert ein offenes $W \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p \in W$ und differenzierbares $\tilde{f}\colon W \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{f}|_{W\cap S} = f|_{W\cap S}$. Ist F irgendeine lokale Parametrisierung um p, so ist $F\colon U \to V \cap S \subseteq \mathbb{R}^4$ differenzierbar und $f \circ F|_{F^{-1}(W)} = \tilde{f} \circ F|_{F^{-1}(W)}$, $\tilde{f}$ und $F|_{F^{-1}(W)}$ sind differenzierbar, also $\tilde{f} \circ F|_{F^{-1}(W)}$ differenzierbar. Also ist $f \circ F$ differenzierbar um x_0.

3 $\Rightarrow$ 1 Sei $\phi\colon W \to \phi(W)$ eine Untermannigfaltigkeitenkarte um p, d.h. ein Diffeomorphismus mit $\phi(W \cap S) = \phi(W) \cap \mathbb{R}^2$. Dann ist also $F = \phi^{-1}|_{\phi(W)\cap\mathbb{R}^2}\colon \phi(W) \cap \mathbb{R}^2 \to W \cap S$ eine lokale Parametrisierung um p. Nach Voraussetzung ist $f \circ F\colon \phi(W) \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar um $\phi(p)$. Dann ist $\tilde{f} = f \circ F \circ \pi_{\mathbb{R}^2} \circ \phi\colon W \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $\tilde{f}|_{W\cap S} = f|_{W\cap S}$, d.h. f ist differenzierbar um p.

3 $\Rightarrow$ 2 Ist klar.

2 $\Rightarrow$ 3 Seien $F_i\colon U_i \to V_i \cap S$, $i = 1, 2$, lokale Parametrisierungen um p. Dann gilt: $f \circ F_1|_{F_1(V_1\cap V_2)} = f \circ F_2 \circ F_2^{-1} \circ F_1|_{F^{-1}(V_1\cap V_2)}$, bzw. $f \circ F_2|_{F_2^{-1}(V_1\cap V_2)} = f \circ F_1 \circ F_1^{-1} \circ F_2|_{F_2^{-1}(V_1\cap V_2)}$. Also ist $f \circ F_1$ differenzierbar um $F_1^{-1}(p)$ genau dann, wenn $f \circ F_2$ differenzierbar um $F_2^{-1}(p)$ ist. $\square$

Bemerkung. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist $f\colon W \to S$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar, $f(x_0) = p$, so gilt $\operatorname{im} Df(x_0) \subseteq T_pS$, d.h. $Df(x_0)$ vermittelt eine lineare Abbildung $Df(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to T_pS$.

Bemerkung. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so ist $Df(p) := D\tilde{f}(p)|_{T_pS}\colon T_pS \to \mathbb{R}^n$ unabhängig von der Ausdehnung $\tilde{f}\colon W \to \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $p \in W$, denn ist $v \in T_pM$ gegeben durch $v = \gamma'(0)$, $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $\gamma(0) = p$, so gilt

$$D\tilde{f}(p)(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\tilde{f} \circ \gamma)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

Definition. $Df(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to T_pS$ (bzw. $Df(p)\colon T_pS \to \mathbb{R}^n$) heißt das *Differential* von $f\colon W \to S$ in x_0 (bzw. von $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ in p).

Wir betrachten jetzt Abbildungen $f\colon S_1 \to S_2$ zwischen Flächen $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Definition. Eine Abbildung $f\colon S_1 \to S_2$ heißt *differenzierbar* um $p_1 \in S_1$, falls f aufgefasst als Abbildung $f\colon S_1 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar um p_1 ist.

Bemerkung. Ist $f\colon S_1 \to S_2$ differenzierbar um $p_1 \in S_1$, so gilt $\operatorname{im} Df(p_1) \subseteq T_{p_2}S_2$, falls $f(p_1) = p_2$.

Definition. Die lineare Abbildung $Df(p_1)\colon T_{p_1}S_1 \to T_{p_2}S_2$ heißt das *Differential* von $f\colon S_1 \to S_2$ in p_1, wobei $p_2 = f(p_1)$.

Definition. Eine differenzierbare und bijektive Abbildung $f\colon S_1 \to S_2$ zwischen Flächen $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *Diffeomorphismus.*

Bemerkung. Ist $f\colon S_1 \to S_2$ ein Diffeomorphismus so ist nach dem lokalen Umkehrsatz $f^{-1}\colon S_2 \to S_1$ differenzierbar.

2.3 Erste und zweite Fundamentalform

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Dann definiert für $p \in S$

$$g_p(v, w) = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad v, w \in T_pS$$

ein Skalarprodukt auf T_pS.

Definition. $g_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ heißt *1. Fundamentalform* von S in $p \in S$.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supseteq U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung von S in p, $F = (F_1, F_2, F_3)$. Dann bilden $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = DF(x)(e_i)$, $i = 1, 2$, eine Basis von $T_{F(x)}S$ für alle $x \in U$. In diesem Sinne hängt T_pS glatt von p ab. Wir setzen $g_{ij}(x) = g_{F(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$ für $i, j = 1, 2$. Sind $v, w \in T_{F(x)}S$ gegeben, so können wir schreiben:

$$v = \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \quad w = \sum_{i=1}^{2} w_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$$

Damit gilt

$$g_{F(x)}(v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} v_i w_j g_{ij}(x)$$

Bemerkung. Ist $F\colon U \to V \cap S$ differenzierbar von der Klasse $\mathscr{C}^{k+1}$, so sind die Komponentenfunktionen $g_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar von der Klasse $\mathscr{C}^k$. In diesem Sinne ist $(g_p\colon T_p \times T_p \to \mathbb{R})_{p \in S}$ eine "differenzierbar" von $p \in S$ abhängige Familie von Skalarprodukten auf den Tangentialräume T_pS.

Bemerkung. Die 1. Fundamentalform ermöglicht es, *Längen* und *Winkel* auf S zu messen: Ist $\gamma\colon [a, b] \to S$ eine $\mathscr{C}^1$-Kurve, so sei

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(x)} \, \mathrm{d}t$$

mit $\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$ die Länge von γ. Sind $\gamma_i\colon I \to S^2$, $i = 1, 2$, reguläre $\mathscr{C}^1$-Kurven mit $\gamma_i(t_0) = p \in S$, $\gamma_i'(t_0) \neq 0$, so sei durch

$$\cos\alpha = \frac{g_p(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))}{\|\gamma_1'(t_0)\|_p \|\gamma_2'(t_0)\|_p}$$

der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen γ_1 und γ_2 in p, bzw. $\gamma_1'(t_0)$ und $\gamma_2'(t_0)$ in T_pS definiert.

Bemerkung (Verhalten der Komponentenfunktionen g_{ij} unter Parametrisierungswechsel). Seien $F\colon U \to V \cap S$, $\tilde{F}\tilde{U} \to \tilde{V} \cap S$ lokale Parametrisierungen von S mit $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ und

$$\tilde{F}^{-1} \circ F|_{F^{-1}(V \cap \tilde{V})}\colon F^{-1}(V \cap \tilde{V}) \to \tilde{F}^{1}(V \cap \tilde{V})$$
$$F^{-1} \circ \tilde{F}|_{F^{-1}(V \cap \tilde{V})}\colon \tilde{F}^{-1}(V \cap \tilde{V}) \to F^{1}(V \cap \tilde{V})$$

die Parametrisierungswechsel, so gilt ($F(x) = \tilde{x}$, $\tilde{F}(x) = \tilde{x}$)

$$\tilde{g}_{ij}|_{\tilde{F}^{-1}(V \cap \tilde{V})}(\tilde{x}) = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial(F^{-1} \circ \tilde{F})_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) \frac{\partial(F^{-1} \circ \tilde{F})_l}{\partial x_j}(\tilde{x}) g_{kl}|_{F^{-1}(V \cap \tilde{V})}(x)$$

Beispiel (Ebene)**.** Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Durch $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (\lambda, \mu) \mapsto x_0 + \lambda v + \mu w$ wird eine Ebene $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisiert. Es gilt $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = v$ und $\frac{\partial F}{\partial \mu} = w$, also mit $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$

$$\big(g_{ij}(x)\big)_{ij} = \begin{pmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}$$

Ist $\{v, w\}$ als Orthonormalsystem gewählt, so gilt also

$$\left(g_{ij}(x)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Zylindermantel vom Radius $R > 0$)**.** Sei $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$. Eine lokale Parametrisierung ist durch $F \colon \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \cap S, (z, \theta) \mapsto (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$ gegeben. Es gilt $\frac{\partial F}{\partial z}(z, \theta) = (0, 0, 1)$ und $\frac{\partial F}{\partial \theta}(z, \theta) = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)$. Also ist

$$\left(g_{ij}(x)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Für $R = 1$ hat also der Zylindermantel die gleiche Fundamentalform wie die Ebene.

Beispiel (Sphäre vom Radius $R > 0$)**.** Eine lokale Parametrisierung von $S = \{p \in \mathbb{R}^3 \colon \|p\|^2 = R^2\}$ ist gegeben durch ($V = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$)

$$F \colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \to V \cap S, (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$\left(g_{ij}(x)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ein *Normalenfeld* auf S ist eine Abbildung $N \colon S \to \mathbb{R}^3$ mit $N(p) \perp T_pS$ für alle $p \in S$. Ein Normalenfeld heißt *Einheitsnormalenfeld*, falls weiterhin $\|N(p)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$ für alle $p \in S$ gilt.

Definition. Eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *orientierbar*, falls ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf S existiert.

Beispiel (Ebene)**.** Mit den Notationen von oben definiert $N(p) = v \times w$ für alle $p \in S$ ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf $E_{x_0,v,w}$.

Beispiel (Sphäre vom Radius $R > 0$)**.** Mit den Notationen von oben definiert $N(p) = \frac{1}{R}p$ für alle $p \in S$ ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf S^2_R.

Beispiel (Zylindermantel vom Radius $R > 0$)**.** Mit den Notationen von oben definiert $N(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{R}(x_1, x_2, 0)$ ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf Z_R.

Beispiel. Das Möbiusband ist nicht orientarbar (Übung).

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N, $p \in S$ und $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von T_pS. $\{e_1, e_2\}$ heiße *positiv orientiert*, wenn $\{e_1, e_2, N(p)\}$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Bemerkung. Lokal ist jede Fläche orientierbar, denn ist $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung, so ist $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x)\right\}$ eine Basis von $T_{F(x)}S$ für alle $x \in U$. Dann ist $\tilde{N}(F(x)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) \perp T_{F(x)}S$ für alle $x \in U$. Mit $N(F(x)) = \tilde{N}(F(x))/\|\tilde{N}(F(x))\|$ wird N ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf $V \cap S$, d.h. $V \cap S$ ist orientierbar.

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Die Abbildung

$$N\colon S \to S^2$$

heißt *Gauß-Abbildung* von S.

Bemerkung. Für $p \in S$ ist

$$DN(p)\colon T_pS \to T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pS$$

ein Endomorphismus von T_pS.

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche von der Klasse $\mathscr{C}^k$ mit $k \geq 2$ mit Einheitsnormalenfeld N. Der Endomorphismus

$$W_p = -DN(p)\colon T_pS \to T_pS$$

heißt *Weinbergabbildung* von S in $p \in S$.

Beispiel (Ebene)**.** Sei $\{v, w\}$ eine Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^3$ und $E_{x_0,v,w} = \{x_0 + \lambda v + \mu w\colon \lambda, mu \in \mathbb{R}\}$, $N(p) = v \times w$ konstant. Dann ist $W_p = -DN(p) = 0$ für alle $p \in E_{x_0,v,w}$.

Beispiel (Zylindermantel vom Radius $R > 0$)**.** Mit dem Einheitsnormalenfeld $N(p) = \frac{1}{R}(x_1, x_2, 0)$ mit $p = (x_1, x_2, x_3)$ ist $N = \frac{1}{R} \cdot \pi_{\mathbb{R}^2}\colon Z_R \to S^2$. T_pZ_R hat als Basis

$$\left\{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

für $p = (x_1, x_2, x_3)$ und bezüglich dieser Basis gilt

$$W_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Sphäre vom Radius $R > 0$)**.** Mit dem Einheitsnormalenfeld $N(p) = \frac{1}{R}p$ ist $N = \frac{1}{R}\colon S^2_R \to S^2$ und $W_p = -DN(p) = -\frac{1}{R}\,\mathrm{id}_{T_pS^2_R}$.

Satz. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche von der Klasse $\mathscr{C}^k$ mit $k \geq 2$ mit Einheitsnormalenfeld N. Dann ist die Weingartenabbildung $W_p\colon T_pS \to T_pS$ selbstadjungiert bezüglich der 1. Fundamentalform g_p, d.h. für alle $v, w \in T_pS$ gilt*

$$g_p(W_p(v), w) = g_p(v, W_p(w))$$

Beweis. Sei $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um p. Setze $X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ für $i = 1, 2$, $F(x) = p$. Dann gilt für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + te_j), N(F(x + te_j)) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$$

Also folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + te_j), N(F(x + te_j)) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x), N(p) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle X_i, DN(p)(X_j)\rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \langle X_i, W_p(X_j)\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x), N(p) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x), N(p) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle X_j, W_p(X_i)\rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned} \tag{$*$}$$

Mit anderen Worten $g_p(W_p(X_i), X_j) = g_p(X_i, W_p(X_j))$. Da $\{X_1, X_2\}$ eine Basis von T_pS ist, folgt die Behauptung. ☐

Definition. Die durch $h_p(v, w) = g_p(v, W_p(w))$, $v, w \in T_pS$, definierte symmetrische Bilinearform $h_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ heißt 2. Fundamentalform von S in p.

Bemerkung. Ist $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung, so sehen wir

$$h_{ij}(x) = h_{F(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\right)$$

d.h. $\big(h_{ij}(x)\big)_{i,j} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist eine symmetrische 2×2-Matrix für alle $x \in U$, die darstellende Matrix von $h_{F(x)}$ bezüglich der Basis $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\right\}$ von $T_{F(x)}S$. Aus $(*)$ in dem Beweis von Satz 1 folgt

$$h_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x), N(F(x)) \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Bemerkung. Für $\widetilde{N} = -N$ gilt $\widetilde{W}_p = -W_p$ und $\tilde{h}_p = -h_p$. Insbesondere ist also die Weingartenabbildung und die 2. Fundamentalform bis auf Vorzeichen auch auf nichtorientierbaren Flächen definiert.

2.4 Krümmung

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ nach Bogenlänge parametrisiert, $\gamma(0) = p$. Aufgefasst als Raumkurve hat γ die Krümmung $\kappa(0) = \|\gamma''(0)\|_{\mathbb{R}^3}$, d.h. falls $\kappa(0) \neq 0$, so ist $\gamma''(0) = \kappa(0)n(0)$. Das Ziel ist die Aufspaltung $\kappa(0) = \kappa_{\text{nor}}(0) + \kappa_{\text{geod}}(0)$ in einen Anteil, der die Krümmung von γ in S misst ("geodätische Krümmung") und einen Anteil, der von der Krümmung von S in $\mathbb{R}^3$ herrührt ("Normalenkrümmung"). Setze dazu $n(0) = n(0)^{\|} + n(0)^{\perp}$ für $n(0)^{\|} \in T_pS$, $T_pS^{\perp} \ni n(0)^{\perp} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$. Entsprechend gilt $\gamma''(0) = \kappa(0)n(0)^{\|} + \kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle_{\mathbb{R}^3} N(p)$.

Definition. Es heißt $\kappa_{\text{nor}}(0) = \langle \gamma''(0), N(p)\rangle_{\mathbb{R}^3}$ die *Normalenkrümmung* von γ in S für $t = 0$.

Satz. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fláche mit Einheitsnormalenfeld N. Sei weiterhin $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = p$. Dann gilt $\kappa_{nor} = h_p(\gamma'(0), \gamma'(0))$. Insbesondere hängt also κ_{nor} nur von $\gamma'(0) \in T_pS$ ab.*

Beweis. Wegen $\gamma(t) \in S$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt $\langle N(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Also gilt

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle N(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle DN(p)\gamma'(0), \gamma'(0)\rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle N(p), \gamma''(0)\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Also $h_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \kappa_{\text{nor}}(0)$. $\square$

Bemerkung. Für die Kurve $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ gilt $\tilde{\kappa}_{\text{nor}}(0) = \kappa_{\text{nor}}(0)$.

Bemerkung. Für die entgegengesetze Orientierung gegeben durch $\tilde{N} = -N$ gilt $\tilde{\kappa}_{\text{nor}}(0) = -\kappa_{\text{nor}}(0)$.

Bemerkung. Für $v \in T_pS$ betrachte die affine Ebene $E_{p,v,N(p)}$. Dann ist $E_{p,v,N(p)} \cap S$ (Übung) eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei also $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_{p,v,N(p)} \cap S$ eine lokale Parametrisierung (nach Bogenlänge) so dass $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Dann ist $h_p(v, v) = \kappa_{\text{nor}}(0)$ (Übung).

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Die Eigenwerte $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ der Weingartenabbildung $W_p\colon T_pS \to T_pS$ heißen *Hauptkrümmungen* von S in p. Ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $X_i \in T_pS$, $X_i \neq 0$, mit $W_p(X_i) = \kappa_i X_i$, heißt *Hauptkrümmungsrichtung.* Ferner heißt $K(p) = \det W_p = \kappa_1\kappa_2 \in \mathbb{R}$ die *Gauß-Krümmung* von S in p, sowie $H_p = \frac{1}{2}\operatorname{tr} W_p = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \in \mathbb{R}$ die *mittlere Krümmung* von S in p.

Definition. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon I \to S$ heißt *Krümmungslinie*, falls $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmmung ist.

Bemerkung. Für $\widetilde{N} = -N$ gilt $\tilde{\kappa}_i = -\kappa_i$, $i = 1, 2$, und $\widetilde{W}_p(X_i) = \tilde{\kappa}_i X_i$, sowie $\widetilde{K}(p) = \tilde{\kappa}_1\tilde{\kappa}_2 = K(p)$. Insbesondere sind also Hauptkrümmungsrichtungen, bzw. Krümmungslinien, sowie die Gaußkrümmung auch auf nichtorientierbaren Flächen wohldefiniert.

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Es heißt $p \in S$

- *elliptisch*, wenn $K(p) > 0$.
- *hyperbolisch*, wenn $K(p) < 0$.
- *parabolisch*, wenn $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$.
- *Flachpunkt*, wenn $W_p = 0$.

Beispiel (Ebene)**.** Sei $E_{x_0,v,w} = \{x_0 + \lambda v + \mu w \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ für $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und ein Orthonormalsystem $\{v, w\}$ in $\mathbb{R}^3$. Setze $N(p) = v \times w$ für alle $p \in E_{x_0,v,w}$, also $W_p = 0$. Also ist $\kappa_1 = \kappa_2 = K(p) = H(p) = 0$ für alle p und alle Richtungen sind Hauptkrümmungsrichtungen, alle nach Bogenlänge parametrisierten Kurven $\gamma \colon I \to E_{x_0,v,w}$ sind Krümmungslinien.

Beispiel (Zylindermantel Z_R vom Radius R)**.** Sei jetzt $N(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{R}(x_1, x_2, 0)$. Dann ist

$$W_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(-x_2, x_1, 0), (0, 0, 1)\}$ von $T_p Z_R$. Also ist $\kappa_1 = \frac{1}{R}$ und $\kappa_2 = 0$, also $K(p) = 0$ und $H(p) = \frac{1}{2R}$. Also ist jeder Punkt $p \in Z_R$ parabolisch. $(-x_2, x_1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ sind Hauptkrümmungsrichtungen und Krümmungslinien sind vertikale Geradensegmente oder horizontale Kreissegmente.

Beispiel (Sphäre S^2_R vom Radius R)**.** Betrachte das nach Innen gerichtete Einheitsnormalenfeld $N(p) = -\frac{1}{R}p$. Dann ist $W_p = \frac{1}{R}\operatorname{id}_{T_p S^2_R}$, also $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R}$, $K(p) = \frac{1}{R^2}$ und $H(p) = \frac{1}{R}$. Also sind alle $p \in S^2_R$ elliptisch und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung, jede nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in S^2_R ist Krümmungslinie.

Die 2. Fundamentalform (bzw. die Weingartenabbildung) beschreibt die Fläche lokal um p bis zur 2. Ordnung:

Satz. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Seien κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen in $p \in S$, $X_1, X_2 \in T_p S$ die Hauptkrümmungsrichtungen, so dass $\{X_1, X_2, N(p)\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Dann existiert eine lokale Parametrisierung $F \colon U \to V \cap S$ um p mit*

$$F(x_1, x_2) = p + \sum_{i=1}^{2} x_i X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \kappa_i N(p) + o(\|x\|^2).$$

Beweis. Sei zunächst $F \colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung mit $F(0) = p$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = X_i$. Dann gilt

$$F(x_1, x_2) = p + \sum_{i=1}^{2} x_i X_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0) + o(\|x\|^2).$$

Es ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0), X_1 \right\rangle X_1 + \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0), X_2 \right\rangle X_2 + \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0), N(p) \right\rangle N(p)$. Also

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = p + \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\left(x_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0), X_k \right\rangle \right)}_{\tilde{x}_k} X_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} x_i x_j \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0), N(p) \right\rangle}_{\kappa_i \delta_{ij}} N(p) + o(\|x\|^2) \end{aligned}$$

Betrachte nun $\phi(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1(x_1, x_2), \tilde{x}_2(x_1, x_2))$, $\phi\colon U \to \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$D\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\phi(0) = 0$. Also existiert eine lokale Umkehrung $\psi\colon \widetilde{U} \to \psi(\widetilde{U}) \subseteq U$ mit $D\psi(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\psi(0) = 0$. Sei $\widetilde{F} = F \circ \psi\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \cap S$ mit $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= p + \sum_{k=1}^{2} \tilde{x}_k X_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} x_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^2 \kappa_k N(p) + o(\|x(\tilde{x})\|^2) = \\ &= p + \sum_{k=1}^{2} \tilde{x}_k X_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \tilde{x}_k^2 \kappa_i N(p) + o(\|\tilde{x}\|^2) \end{aligned}$$

da $x(\tilde{x}) = \tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|)$. □

Bemerkung. Sei jetzt $Q(x_1, x_2) = p + \sum_{i=1}^{2} x_i X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \kappa_i N(p)$ eine solche Approximation bis zur 2. Ordnung p. Ist $K(p) > 0$, so beschreibt Q einen Paraboloid. Ist $K(p) < 0$, so beschreibt Q eine Sattelfläche.

2.5 Integration und Flächeninhalt

Definition. Sei $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung der Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}$ mit $f|_{S \setminus V} = 0$ heißt *integrierbar*, falls die Funktion $U \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto (f \circ F)(x_1, x_2)\sqrt{\det(g_{ij}(x_1, x_2))_{i,j}}$ integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_S f \,\mathrm{d}A = \int_U (f \circ F)(x_1, x_2) \sqrt{\det(g_{ij}(x_1, x_2))_{ij}} \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

Lemma. *Seien $F\colon U \to V \cap S$ bzw. $\widetilde{F}\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \cap S$ lokale Parametrisierungen von $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann gilt für $f\colon S \to \mathbb{R}$ mit $f|_{S \setminus (V \cap \widetilde{V})} = 0$:*

$$(f \circ F)\sqrt{\det(g_{ij})} \text{ integrierbar} \iff (f \circ \widetilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} \text{ integrierbar}$$

In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ F)\sqrt{\det(g_{ij})} \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\widetilde{U}} (f \circ \widetilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} \,\mathrm{d}\tilde{x}_1 \mathrm{d}\tilde{x}_2.$$

Beweis. Sei $\phi = F^{-1} \circ \widetilde{F}$ der Parametrisierungswechsel. Dann gilt

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{x}) = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial \phi_k}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}) \frac{\partial \phi_l}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}) g_{kl}(\phi(\tilde{x})) = \sum_{k,l=1}^{2} D\phi(\tilde{x})_{ki} D\phi(\tilde{x})_{lj} g_{kl}(\phi(\tilde{x}).$$

Also ist $(\tilde{g}_{ij}) = (D\phi)^T (g_{ij} \circ \phi)(D\phi)$. Also ist $\det(\tilde{g}_{ij}) = (\det D\phi)^2 \det(g_{ij} \circ \phi)$, also $\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} = |\det D\phi| \sqrt{\det(g_{ij} \circ \phi)}$. Die Transformationsformel liefert

$$\int_{F^{-1}(V \cap \widetilde{V})} (f \circ F) \sqrt{\det(g_{ij})} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\widetilde{F}^{-1}(V \cap \widetilde{V})} (f \circ \widetilde{F}) \sqrt{\det(g_{ij} \circ \phi)} |\det D\phi| \, \mathrm{d}\tilde{x}_1 \mathrm{d}\tilde{x}_2$$

Also folgt die Behauptung. □

Definition. $f \colon S \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls $f = f_1 + \cdots + f_k$ mit $f_i|_{S \setminus V_i} = 0$ mit lokalen Parametrisierungen $F_i \colon U_i \to V_i \cap S$ und integrierbaren f_i existieren. In diesem Fall setzen wir

$$\int_S f \, \mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{k} \int_S f_i \, \mathrm{d}A$$

Bemerkung. Sei $f \colon S \to \mathbb{R}$ und $A \subseteq S$. Für $\chi_A f =: f_A$ gilt $f_A|_{S \setminus A} = 0$. Z.B. für $A = V \cap S$: $\chi_{V \cap S} f$ lässt sich direkt integrieren.

Bemerkung. Ist auch $f = \tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_\ell$ mit $\tilde{f}_j|_{S \setminus \widetilde{V}_j} = 0$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \int_S f_i \, \mathrm{d}A = \sum_{j=1}^{\ell} \int_S \tilde{f}_j \, \mathrm{d}A.$$

Der Wert des Integrals hängt also nicht von der Art der Zerlegung ab.

Bemerkung. Die üblichen Eigenschaften des Integrals übertragen sich:

$$\int_S \lambda f + \mu g \, \mathrm{d}A = \lambda \int_S f \, \mathrm{d}A + \mu \int_S g \, \mathrm{d}A$$

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und integrierbare $f, g \colon S \to \mathbb{R}$, und

$$\int_S f \, \mathrm{d}A \leq \int_S g \, \mathrm{d}A$$

für integrierbare $f, g \colon S \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$.

Definition. $N \subseteq S$ heißt *Nullmenge*, falls $F^{-1}(N) \subseteq U$ eine Nullmenge ist für jede lokale Parametrisierung $F \colon U \to V \cap S$ von S.

Bemerkung. Ist $f \colon S \to \mathbb{R}$ und $g \colon S \to \mathbb{R}$ und $g|_{S \setminus N} = f|_{S \setminus N}$ für eine Nullmenge $N \subseteq S$, so ist g integrierbar mit

$$\int_S f \, \mathrm{d}A = \int_S g \, \mathrm{d}A.$$

Definition. Ist $f = 1$ integrierbar, so heißt

$$A(S) = \int_S 1 \,\mathrm{d}A$$

der *Flächeninhalt* von S.

Beispiel (Sphäre S_R^2 vom Radius R)**.** Sei $U = (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$, $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ und $F\colon U \to V \cap S, (\varphi, \theta) \mapsto (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi)$. Dann ist $S \setminus V$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine Nullmenge. Früher:

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

Also ist $\sqrt{\det(g_{ij})} = R^2|\cos\varphi|$ und

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

2.6 Spezielle Klassen von Flächen

2.6.1 Minimalflächen

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N, $A(S) < \infty$ und $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung. Sei weiterhin $f\colon S \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit kompaktem Träger in $V \cap S$. Für genügend kleines t ist

$$S_t := \{p + f(p)t\,N(p) \colon p \in S\}$$

eine Fläche mit lokaler Parametrisierung

$$F_t\colon U \to V \cap S_t, x \mapsto F(x) + t(f \circ F)(x)(N \circ F)(x)$$

Wir möchten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} A(S_t)$ berechnen.

Lemma (1. Variation des Flächeninhalts)**.** *Es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} A(S_t) = -2\int_S f \cdot H \,\mathrm{d}A$$

mit der mittleren Krümmung H von S.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + t\frac{\partial (f \circ F)}{\partial x_i}(N \circ F) + t(f \circ F)\frac{\partial (N \circ F)}{\partial x_i}$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
(g_t)_{ij} &= \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial x_i}, \frac{\partial F_t}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \\
&= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + t(f\circ F)\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial (N\circ F)}{\partial x_j} \right\rangle + t(f\circ F)\left\langle \frac{\partial (N\circ F)}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + o(t) = \\
&= g_{ij} - 2t(f\circ F)h_{ij} + o(t)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\det\big((g_t)_{ij}\big) &= g_{11}g_{22} - 2t(f\circ F)(g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22}) - g_{21}g_{12} + \\
&\quad + 2t(f\circ F)(g_{21}h_{12} + h_{21}g_{12}) + o(t) = \\
&= \det(g_{ij}) + 2t(f\circ F)\big(-g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22} + g_{21}h_{12} + h_{21}g_{12}\big) + o(t)
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
h_{ij} = g\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, W\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{2} W_{kj}g_{ik}
$$

für die Matrix (W_{ij} von W bzgl. $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right\}$. Also

$$
\begin{aligned}
\det\big((g_t)_{ij}\big) &= \det(g_{ij}) + 2t(f\circ F)\big(-g_{11}(g_{21}W_{12} + g_{22}W_{22}) - g_{22}(g_{11}W_{11} + g_{12}W_{21}) + \\
&\quad + g_{21}(g_{11}W_{12} + g_{12}W_{22}) + g_{12}(g_{21}W_{11} + g_{12}W_{21})\big) + o(t) = \\
&= \det(g_{ij}) - 2t(f\circ F)\det(g_{ij})(W_{11} + W_{22}) + o(t) = \\
&= \det(g_{ij})\big(1 - 4t(f\circ F)H\big) + o(t)
\end{aligned}
$$

und

$$
\sqrt{\det\big((g_t)_{ij}\big)} = \sqrt{\det(g_{ij})}\big(1 - 2t(f\circ F)H\big) + o(t).
$$

Insgesamt folgt

$$
A(S_t) = \int_S \big(1 - 2t\,f\cdot H + o(t)\big)\,\mathrm{d}A = A(S) - 2t\int_S f\cdot H\,\mathrm{d}A + o(t). \qquad \square
$$

Definition. Eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $H = 0$ heißt *Minimalfläche.*

Bemerkung. Für Minimalflächen S ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} A(S_t) = 0$.

Bemerkung (Seifenhäute). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit kompaktem Abschluss $\overline{S}$. Hat S minimalen Flächeninhalt unter solchen Flächen $\widetilde{S}$ mit demselben Rand $\partial\widetilde{S} = \partial S$, so hat S verschwindende mittlere Krümmung.

Beweis. Betrachte eine Variation S_t wie oben. Dann ist $\partial S_t = \partial S$ und

$$
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} A(S_t) = -2\int_S f\cdot H\,\mathrm{d}A.
$$

Angenommen $H(p) \neq 0$, etwa $H(p) > 0$ für $p \in S$. Wähle $f\colon S \to \mathbb{R}$ wie folgt: Es existiert ein offenes $\widetilde{V} \subseteq V$ und $\delta > 0$ mit $H(q) \geq \delta$ für alle $q \in \widetilde{V}\cap S$. Setze $f = \chi_{\widetilde{V}\cap S}\cdot H$. Dann wäre

$$
\int_S f\cdot H\,\mathrm{d}A = \int_S \chi_{\widetilde{V}\cap S}H^2\,\mathrm{d}A \geq A(\widetilde{V}\cap S)\delta^2 > 0. \qquad \square
$$

3 Innere Geometrie von Flächen

3.1 Isometrien

Definition. Seien $S, \widetilde{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ Flächen. Eine differenzierbare Abbildung $f\colon S \to \widetilde{S}$ heißt *lokale Isometrie*, falls $Df(p)\colon T_pS \to T_{f(p)}\widetilde{S}$ für alle $p \in S$ eine lineare Isometrie bezüglich der jeweiligen 1. Fundamentalform g_p und $\tilde{g}_{f(p)}$ ist, d.h. $\tilde{g}_{f(p)}(Df(p)v, Df(p)w) = g_p(v, w)$ für alle $v, w \in T_pS$.

Bemerkung. Ist $f\colon S \to \widetilde{S}$ eine lokale Isometrie, so ist f ein lokaler Diffeomorphismus.

Beispiel. $f\colon E_{e_1,e_2} \to Z_R, (x_1, x_2) \mapsto (R\cos(x_1/R), R\sin(x_1/R), x_2)$ ist eine lokale Isometrie, denn

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2.$$

Früher haben wir gezeigt, dass $K_{E_{e_1,e_2}} = K_{Z_R} = 0$, $H_{E_{e_1,e_2}} = 0$ und $H_{Z_R} = \frac{1}{2R}$.

Bemerkung. Eine Größe der *inneren Geometrie* ist eine Größe, die invariant unter lokalen Isometrien ist. Die mittlere Krümmung ist also keine Größe der inneren Geometrie. Für eine lokale Isometrie $f\colon S \to \widetilde{S}$ gilt im Allgemeinen $(\widetilde{H} \circ f)(p) \neq H(p)$ für $p \in S$, siehe obiges Beispiel.

Definition. Ein Diffeomorphismus $f\colon S \to \widetilde{S}$ heißt *Isometrie*, falls er eine lokale Isometrie ist.

Definition. Zwei Flächen $S, \widetilde{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ heißen *(lokal) isometrisch*, falls eine (lokale) Isometrie $S \to \widetilde{S}$ existiert.

Beispiel. Ebene und Zylinder von Radius $R > 0$ sind lokal isometrisch, aber nicht isometrisch (Übung).

3.2 Vektorfelder und kovariante Ableitung

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Eine (differenzierbare) Abbildung $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit $X(p) \in T_pS$ für alle $p \in S$ heißt *(differenzierbares) Vektorfeld.*

Bemerkung. Sei $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um $p \in S$. Dann ist $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x)\right\}$ eine Basis von $T_{F(x)}(S)$ für $x \in U$ und somit gilt

$$(X \circ F)(x) = \sum_{i=1}^{2} X_i(x) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$$

für eindeutig bestimmte Funktionen $X_i\colon U \to \mathbb{R}$ (die Koeffizientenfunktionen von X bezüglich F).

Bemerkung. X ist differenzierbar um p genau dann, wenn $X_i^F\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar um $F^{-1}(p)$ sind für *eine* lokale Parametrisierung F um p. Dies ist genau dann der Fall, wenn $X_i^F\colon U \to \mathbb{R}$ für *jede* lokale Parametrisierung F um $F^{-1}(p)$ differenzierbar sind.

Beispiel. Sei $f\colon S \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Da g_p nicht ausgeartet ist, existiert genau ein $\operatorname{grad} f(p) \in T_pS$ mit $Df(p)v = g_p(\operatorname{grad} f(p), v)$ für alle $v \in T_pS$. Das Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ heißt *Gradientenvektorfeld* von f. Ist $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung, so gilt für $X = \operatorname{grad} f$:

$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_j}(x) = (Df)(F(x))\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = g_{F(x)}\left(X(F(x)), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\right) = \sum_{i=1}^{2} X_i(x) g_{ij}(x).$$

Für $G = (g_{ij})$ gilt also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(f\circ F)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(f\circ F)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial(f\circ F)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(f\circ F)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Ist $f\colon S \to \mathbb{R}$ also differenzierbar der Klasse $\mathscr{C}^{k+1}$, so ist $\operatorname{grad} f$ differenzierbar der Klasse $\mathscr{C}^k$.

Definition. Für $v \in T_pS$ und differenzierbares $f\colon S \to \mathbb{R}$ heißt $v(f) = \big(Df(p)\big)v \in \mathbb{R}$ die *Richtungsableitung* von f in Richtung v. Für ein Vektorfeld $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ setzen wir $X(f)\colon S \to \mathbb{R}, p \mapsto \big(X(p)\big)(f)$.

Bemerkung. Ist f differenzierbar der Klasse $\mathscr{C}^{k+1}$ und X differenzierbar der Klasse $\mathscr{C}^k$, so ist $X(f)$ differenzierbar der Klasse $\mathscr{C}^k$.

Lemma. *Seien $X, Y\colon S \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfelder der Klasse $\mathscr{C}^{k+1}$. Dann existiert ein eindeutiges differenzierbares Vektorfeld $[X,Y]\colon S \to \mathbb{R}^3$ der Klasse $\mathscr{C}^k$, so dass $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ für alle differenzierbaren $f\colon S \to \mathbb{R}$ der Klasse $\mathscr{C}^\ell$ mit $\ell \geq 2$.*

Beweis. Sei $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung. Dann gilt $X \circ F = \sum_{i=1}^2 X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ und $Y \circ F = \sum_{i=1}^2 Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ für $X_i, Y_i\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Also gilt für differenzierbares $f\colon S \to \mathbb{R}$

$$X(f) \circ F = \sum_{i=1}^{2} X_i \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_i}, \quad Y(f) \circ F = \sum_{i=1}^{2} Y_i \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_i}$$

und

$$X(Yf) \circ F = \sum_{i,j=1}^{2} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(Y_j \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{2}\left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_j} + X_i Y_j \frac{\partial^2(f \circ F)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

und analog

$$Y(Xf) \circ F = \sum_{i,j=1}^{2}\left(Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_j} + Y_i X_j \frac{\partial^2(f \circ F)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

Also ist

$$\big(X(Yf) - Y(Xf)\big) \circ F = \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{2} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)}_{Z_j\colon U \to \mathbb{R}} \frac{\partial (f \circ F)}{\partial x_j} = Zf \circ F$$

für $Z \circ F = \sum_{i=1}^{2} Z_i \frac{\partial (f \circ F)}{\partial x_i}$. Dies definiert ein eindeutiges Vektorfeld $Z\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit $Zf = X(Yf) - Y(Xf)$ für alle $f\colon S \to \mathbb{R}$. $\square$

Definition. Das Vektorfeld $[X, Y]\colon S \to \mathbb{R}^3$ heißt *Kommutator* von X und Y.

Sei $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $v \in T_pS$. Wir wollen die Richtungsableitung von X in die Richtung von v definieren. Diese sollte ein Tangentialvektor in T_pS sein. Problematisch ist dabei allerdings, dass im Allgemeinen $(DX(p))(v) \notin T_pS$. Wir betrachten daher die orthogonale Projektion $\pi_p\colon \mathbb{R}^3 \to T_pS, v \mapsto v - \langle v, N(p)\rangle N(p)$ für einen der beiden Einheitsnormalenvektoren $N(p)$.

Definition. Sei $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $v \in T_pS$. Dann heißt $\nabla_v X := \pi_p\big(DX(p)(v)\big) \in T_pS$ die *kovariante Ableitung von X in p in Richtung v*. Für ein weiteres Vektorfeld $Y\colon S \to \mathbb{R}^3$ heißt das Vektorfeld $\nabla_Y X$ definiert durch $(\nabla_Y X)(p) = \nabla_{Y(p)} X$ die *kovariante Ableitung von X in Richtung Y*.

Bemerkung (Ausdruck bezüglich einer lokalen Parametrisierung $F\colon U \to S \cap V$)*.* Schreibe $X \circ F = \sum_{i=1}^{2} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ und $Y \circ F = \sum_{i=1}^{2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X \circ F = \pi\big(DX(Y) \circ F\big) = \pi\left(\sum_{i=1}^{2} Y_i \frac{\partial X \circ F}{\partial x_i}\right) &= \\
= \pi\left(\sum_{i=1}^{2} Y_i \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} + X_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right) &= \\
= \sum_{i=1}^{2} Y_i \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} + X_j \pi\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right)&
\end{aligned}$$

Wir entwickeln $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ in die Basis $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), N(F(x))\right\}$, wobei $N(F(x)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial F}{\partial x_2} / \left\| \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}\right\|$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma^1_{ij}(x)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) + \Gamma^2_{ij}(x)\frac{\partial F}{\partial x_2}(x) + h_{ij}(x) N(F(x))$$

für eindeutig bestimmte Funktionen $\Gamma^k_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X \circ F &= \sum_{i=1}^{2} Y_i \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} + X_j \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_k}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{i,j=1}^{2} Y_i X_j \Gamma^k_{ij}\right) \frac{\partial F}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Definition. In der Basisentwicklung der zeiten Ableitung einer lokalen Parametrisierung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1(x)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) + \Gamma_{ij}^2(x)\frac{\partial F}{\partial x_2}(x) + h_{ij}(x)N(F(x))$$

heißen die Koeffizientenfunktionen $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$, $i,j,k = 1,2$, *Christoffelsymbole.* Es gilt für Vektorfelder X, Y

$$\nabla_Y X \circ F = \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2} Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i,j=1}^{2} Y_i X_j \Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial F}{\partial x_k}$$

Bemerkung. Für die Vektorfelder

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \circ F^{-1} \colon V \cap S \to \mathbb{R}^3, \quad i = 1,2$$

gilt also insbesondere

$$\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \circ F = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

Bemerkung. Es gilt $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ nach dem Satz von Schwartz.

Lemma. *Für die Christoffelsymbole gilt*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right) g^{\ell k}$$

wobei g^{ij} die Koeffizienten von $(g_{ij})_{i,j}^{-1}$ sind.

Beweis. Es gilt $g_{j\ell} = (g \circ F)\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right\rangle$ und daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_\ell}\right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{i\ell}^k \frac{\partial F}{\partial x_k}\right\rangle = \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^k g_{k\ell} + \Gamma_{i\ell}^k g_{jk}\right)\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ji}^k g_{k\ell} + \Gamma_{jl}^k g_{ik}\right)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell} = \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{\ell i}^k g_{kj} + \Gamma_{\ell j}^k g_{ik}\right)$$

Also folgt

$$\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell} = 2\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k g_{k\ell}$$ □

Bemerkung. Die Christoffelsymbole sind also Größen der inneren Geometrie.

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften der kovarianten Ableitung zusammen:

Satz. *Für die kovariante Ableitung $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ gilt:*

1. $\nabla_X(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \nabla_X Y_1 + \lambda_2 \nabla_X Y_2$ *für* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *und Vektorfelder* X, Y_1, Y_2.
2. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ *für* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *und Vektorfelder* X, Y.
3. $\nabla_{f_1X_1+f_2X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$ *für* $f_1, f_2\colon S \to \mathbb{R}$ *und Vektorfelder* X_1, X_2, Y.
4. $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ *für Vektorfelder* X, Y, Z.
5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ *für Vektorfelder* X, Y *(Torsionsfreiheit).*

Beweis. 1-3 folgen aus $\nabla_X Y = \pi(DX(Y))$ und $DX(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 DX(Y_1) + \lambda_2 DX(Y_2)$, $DX(fY) = DX(f)Y + fDX(Y)$ und $D(f_1X_1 + f_2X_2)(Y) = f_1 DX_1(Y) + f_2 DX_2(Y)$.

Weiter gilt $Xg(Y,Z) = X\langle Y, Z\rangle = \langle DY(X), Z\rangle + \langle Y, DZ(X)\rangle = \langle \pi(DY(X)), Z\rangle + \langle Y, \pi(DZ(X))\rangle = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ und bezüglich einer lokalen Parametrisierung F gilt

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \circ F = \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial F}{\partial x_j} = [X,Y] \circ F. \qquad \square$$

3.3 Krümmungstensor & Theorema Egregium

Definition. Seien $X, Y, Z\colon S \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder: Die *zweite kovariante Ableitung* von Z nach X und Y ist definiert durch

$$\nabla^2_{X,Y} Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

Lemma. *Sei* $F\colon U \to V \cap S$ *eine lokale Parametrisierung und* $X \circ F = \sum_i X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $Y \circ F = \sum_i Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $Z \circ F = \sum_i Z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$. *Dann gilt* $\nabla^2_{X,Y} Z \circ F = \sum_i (\nabla^2_{X,Y} Z)_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ *mit*

$$\begin{aligned}(\nabla^2_{X,Y} Z)_m = &\sum_{i,j} \frac{\partial^2 Z_m}{\partial x_i \partial x_j} X_i Y_j + \sum_{i,j,k} \Gamma^m_{ij} \frac{\partial Z}{\partial x_k}(X_i Y_k + X_k Y_j) - \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial Z_m}{\partial x_k} X_i Y_j \\ &+ \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x_i} + \sum_\ell (\Gamma^m_{\ell i} \Gamma^\ell_{kj} - \Gamma^m_{k\ell} \Gamma^\ell_{ij}) X_i Y_j Z_k \right)\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt(s.o.):

$$\nabla_Y Z \circ F = \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell \frac{\partial Z_k}{\partial x_\ell} Y_\ell + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Z_i Y_j \right)}_{=:U_k} \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X \underbrace{(\nabla_Y Z)}_{U} &= \sum_\alpha \left(\sum_m \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_m} X_m + \sum_{\beta,\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U_\beta X_\gamma \right) \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \\
&= \sum_\alpha \left(\sum_{m,\ell} \left(\frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_m \partial x_\ell} Y_\ell X_m + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\ell} \frac{\partial Y_\ell}{\partial x_m} X_m \right) \right. \\
&\quad + \sum_{m,i,j} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x_m} Z_i Y_j X_m + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial Z_i}{\partial x_m} Y_j X_m + \Gamma_{ij}^\alpha Z_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_m} X_m \right) \\
&\quad \left. + \sum_{\beta,\gamma,\ell} \left(\Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial x_\ell} Y_\ell X_j + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta Z_i Y_j X_j \right) \right) \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} =: I_1
\end{aligned}$$

Genauso

$$\nabla_X Y \circ F = \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell \frac{\partial Y_k}{\partial x_\ell} X_\ell + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Y_i X_j \right)}_{=:V_k} \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\nabla_X Y} Z \circ F &= \sum_\alpha \left(\sum_m \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_m} V_m + \sum_{\beta,\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Z_\beta V_\gamma \right) \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \\
&= \sum_\alpha \left(\sum_{m,\ell} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_m} \frac{\partial Y_m}{\partial x_\ell} X_\ell + \sum_{m,i,j} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_m} \Gamma_{ij}^m Y_i X_j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\beta,\gamma,\ell} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Z\beta \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\ell} X_\ell + \sum_{\beta,\gamma,i,j} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Z_\beta \Gamma_{ij}^\gamma Y_i X_j \right) \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} =: I_2
\end{aligned}$$

Die Behauptete Formel ergibt sich als Differenz $I_1 - I_2$. □

Korollar. *Für $p \in S$ hängt $(\nabla^2_{X,Y} Z)(p) \in T_pS$ nur von $v := X(p) \in T_pS$ und $w := Y(p) \in T_pS$ ab. Für ein Vektorfeld $Z\colon S \to \mathbb{R}^3$ liefert die kovariante Ableitung also eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned}
T_pS \times T_pS &\to T_pS \\
(v,w) &\mapsto \nabla^2_{v,w} Z := (\nabla^2_{X,Y} Z)(p)
\end{aligned}$$

für beliebige Vektorfelder $X, Y\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit $X(p) = v$, $Y(p) = w$.

Bemerkung. Der Satz von Schwarz gilt im allgemeinen nicht für die zweite kovariante Ableitung, d.h. im allgemeinen $\nabla^2_{X,Y} Z \neq \nabla^2_{Y,X} Z$. Die Abweichung wird durch den Krümmungstensor gemessen.

Definition. Seien $v, w \in T_pS$ und $Z\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist der *Riemannsche Krümmungstensor* definiert durch

$$R(v,w)Z := \nabla^2_{v,w}Z - \nabla^2_{w,v}Z \in T_pS$$

Bemerkung. Offenbar ist $R(v,w)Z$ schiefsymmetrisch in v und w.

Lemma. *Sei $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung, $F(x_0) = p$, $v = \sum_i v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)$, $v = \sum_i w_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)$, $v_i, w_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$R(v,w)Z = \sum_{i,j,k,\ell} R^\ell_{ijk}(x_o) v_i w_j Z_k(x_0) \frac{\partial F}{\partial x_\ell}(x_0)$$

für

$$R^\ell_{ijk} := \frac{\partial \Gamma^\ell_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ki}}{\partial x_i} + \sum_m (\Gamma^\ell_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^\ell_{mj}\Gamma^m_{ki})$$

Beweis. Benutze Lemma 1: Die Terme, die symmetrisch in v, w (bzw. X, Y) sind, fallen weg. □

Korollar. *$R(v,w)Z \in T_pS$ hängt nur von $u := Z(p) \in T_pS$ ab, R liefert also eine $\mathbb{R}$-trilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} T_pS \times T_pS \times T_pS &\to T_pS \\ (v,w,u) &\mapsto R(v,w)u := R(v,w)Z \end{aligned}$$

für $Z\colon S \to \mathbb{R}^3$ beliebig mit $Z(p) = u$.

Satz (Gauß-Gleichung)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Dann gilt für $v, w, u \in T_pS$:*

$$R(v,w)u = h(w,u) \cdot W(v) - h(v,u) \cdot W(w) \in T_pS$$

Mit der zweiten Fundamentalform $h\colon T_pS \times T_pS \to T_pS$ und der Weingartenabbildung $W\colon T_pS \to T_pS$.

Beweis. Sei $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um p. Dann gilt (s.o.):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_k} + h_{ij}(N \circ F) \qquad h_{ij} = h \circ F\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x_\ell \partial x_i \partial x_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x_\ell, x_k}\right) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_\ell}(N \circ F) + h_{ij}\frac{\partial (N \circ F)}{\partial x_\ell} \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \Gamma^k_{ij}\sum_m \Gamma^m_{\ell k}\frac{\partial F}{\partial x_m}\right) - h_{ij} W\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) + \text{Normalanteil} \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x_\ell} + \sum_k \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{\ell k} - h_{ij} W_{m\ell}\right)\frac{\partial F}{\partial x_m} + \text{Normalanteil} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial x_\ell \partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_\ell \partial x_j} = \\
&= \sum_m \Bigg(\underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x_\ell} - \frac{\partial \Gamma_{\ell j}^m}{\partial x_i} + \sum_k (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{\ell k}^m - \Gamma_{\ell j}^k \Gamma_{ik}^m)}_{=R_{\ell j i}^m} - h_{ij} W_{m\ell} + h_{\ell j} W_{mi} \Bigg) \frac{\partial F}{\partial x_m} + \text{Normalanteil}
\end{aligned}
$$

Also $R_{\ell j i}^m = h_{ij} W_{m\ell} - h_{\ell j} W_{mi}$. Aus

$$
R_{\ell i j}^m := \frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial x_\ell} - \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^m}{\partial x_j} + \sum_k (\Gamma_{k\ell}^m \Gamma_{ki}^k - \Gamma_{ki}^m \Gamma_{k\ell}^k)
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_m R_{\ell j i}^m \frac{\partial}{\partial x_m} = \sum_m \left(h_{ij} w_{m\ell} \frac{\partial}{\partial x_m} - h_{\ell j} W_{mi} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) = \\
&= h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) W\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) - h\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}
$$

Da $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p)$ eine Basis von T_pS ist, gilt die Formel allgemein. □

Satz (Theorema Egregium)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Dann gilt für jede Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von T_pS*

$$
K(p) = g(R(e_1, e_2)e_2, e_1).
$$

Beweis. Mit der Gaußgleichung gilt

$$
\begin{aligned}
g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) &= h(e_2, e_2) g(W(e_1), e_1) - h(e_1, e_2) g(W(e_2), e_1) = \\
&= g(W(e_2), e_2) g(W(e_1), e_1) - g(W(e_1), e_2) g(W(e_2), e_1) = \\
&= W_{11} W_{22} - W_{12} W_{21} = \det W_p = K(p)
\end{aligned}
$$

für (W_{ij}) die Matrix von W_p bezüglich $\{e_1, e_2\}$. □

Bemerkung. Die Gaußkrümmung ist also eine Größe der inneren Geometrie von S, d.h. für eine lokale Isometrie $f\colon S \to \widetilde{S}$ gilt $\widetilde{K}(f(p)) = K(p)$.

Beispiel. Es gibt keine längentreuen, d.h. lokal isometrischen, ebenen Karten der Erdoberfläche, denn $K_{S_R^2} = \frac{1}{R^2}$, aber $K_{\mathbb{R}^2} = 0$.

Wir fassen die Symmetrien des Krümmungstensors zusammen:

Lemma. *Für $v, w, x, y \in T_pS$ gilt*
1. $R(v, w)x = -R(w, v)x$
2. $g(R(v, w)x, y) = -g(R(v, w)y, x)$

3. $g(R(v,w)x,y) = g(R(x,y)v,w)$
4. Bianchi Identität: $R(v,w)x + R(w,x)v + R(x,v)w = 0.$

Beweis.
1. Es ist $R(v,w)x = \nabla^2_{v,w}X - \nabla^2_{w,v}X$ für eine Vektorfeld $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit $X(p) = x$.
2. Folgt aus 3. und 1.
3. Mit der Gaußgleichung folgt $g(R(v,w)x,y) = h(w,x)g(W(v),y) - h(v,x)g(W(w),y) = h(w,x)h(v,y) - h(v,x)h(w,y)$.
4. Es ist $R(v,w)x + R(w,x)v + R(x,v)w = h(w,x)W(v) - h(v,x)W(w) + h(x,v)W(w) - h(w,v)W(x) + h(v,w)W(x) - h(x,w)W(v) = 0$. □

3.4 Parallelverschiebung & Geodätische

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall $\gamma\colon I \to S$ eine Kurve. Eine Abbildung $X\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $X(t) \in T_{\gamma(t)}S$ für alle $t \in I$ heißt *Vektorfeld entlang* γ.

Beispiel. Ist $\gamma\colon I \to S$ differenzierbar, so ist $X(t) = \gamma'(t)$ ein Vektorfeld entlang γ.

Definition. Sei $X\colon I \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld entlang der differenzierbaren Kurve $\gamma\colon I \to S$. Dann heißt

$$\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X(t) = \pi^{\|}_{\gamma(t)}(X'(t)) \in T_{\gamma(t)}S$$

kovariante Ableitung entlang γ, wobei $\pi^{\|}_{\gamma(t)}\colon \mathbb{R}^3 \to T_{\gamma(t)}S$ die orthogonale Projektion sei.

Bemerkung. Ist $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung und $\gamma\colon I \to V \cap S$, so gilt mit $\tilde{\gamma}(t) = (F^{-1} \circ \gamma)(t)$

$$X(t) = X_1(t)\frac{\partial F}{\partial x_1}(\tilde{\gamma}(t)) + X_2(t)\frac{\partial F}{\partial x_2}(\tilde{\gamma}(t)).$$

Dann gilt analog zu Abschnitt 3.2:

$$\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X(t) = \sum_k \Big(X_k'(t) + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}(\tilde{\gamma}(t))X_i(t)\tilde{\gamma}_j'(t)\Big)\frac{\partial F}{\partial x_k}(\tilde{\gamma}(t))$$

mit $\tilde{\gamma}' = (\tilde{\gamma}_1', \tilde{\gamma}_2')$.

Bemerkung. Die Rechenregeln aus 3.2 gelten analog:

(i) $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) = \lambda_1\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X_1 + \lambda_2\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X_2$, $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}(fX) = f'X + f\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X$, $f\colon I \to \mathbb{R}$.

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(X,Y) = g(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X, Y) + g(X, \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}Y)$.

Weiterhin gilt $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}(X \circ \varphi) = \varphi'(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X) \circ \varphi$ für eine Umparametrisierung $\varphi\colon J \to I$.

Definition. Das Vektorfeld $X\colon I \to \mathbb{R}^3$ entlang $\gamma\colon I \to S$ heißt *parallel*, falls $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}X(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Bemerkung. Ist $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung und $\gamma\colon I \to V \cap S$, so ist $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} X(t) = 0$ für alle $t \in I$ äquivalent zu einem linearen Differentialgleichungssystem ($\tilde{\gamma} = F^{-1} \circ \gamma$):

$$X_1'(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1(\tilde{\gamma}(t)) X_i(t) \tilde{\gamma}_j'(t) = 0$$
$$X_2'(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^2(\tilde{\gamma}(t)) X_i(t) \tilde{\gamma}_j'(t) = 0$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungssysteme impliziert damit folgenden Satz:

Satz. *Sei $\gamma\colon I \to S$ differenzierbar, $t_0 \in I$. Dann existiert für alle $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$ ein eindeutiges paralleles Vektorfeld $X\colon I \to \mathbb{R}^3$ entlang γ mit $X(t_0) = v_0$.*

Definition. Sei $\gamma\colon [t_0, t_1] \to S$ differenzierbar. Die Abbildung $P_\gamma\colon T_{\gamma(t_0)}S \to T_{\gamma(t_1)}S$ die $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$ auf $v_1 = X(t_1)$ abbildet, wobei $X\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ das eindeutige parallele Vektorfeld entlang γ mit $X(t_0) = v_0$ ist, heißt *Paralleltransport entlang* γ.

Bemerkung. $P_\gamma\colon T_{\gamma(t_0)}S \to T_{\gamma(t_1)}S$ ist eine lineare Isometrie, denn sind X und Y parallel entlang γ, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t)) = g_{\gamma(t)}\big(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} X(t), Y(t)\big) + g_{\gamma(t)}\big(X(t), \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} Y(t)\big) = 0.$$

Beispiel. Für die Ebene $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist $T_pE = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ für alle $p \in E$. Für eine Kurve $\gamma\colon I \to E$ ist ein Vektorfeld $X = (X_1, X_2)$ genau dann parallel entlang γ, wenn X_i, $i = 1, 2$, konstant ist.

Definition. $\gamma\colon I \to S$ heißt *Geodätische*, falls gilt: $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} \gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Bemerkung. Ist $F\colon U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung und $\gamma\colon I \to V \cap S$, so gilt mit $\tilde{\gamma}\colon I \to U$, $\tilde{\gamma}(t) = F^{-1}(\gamma(t))$:

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}_1'(t) \frac{\partial F}{\partial x_1}(\tilde{\gamma}(t)) + \tilde{\gamma}_2'(t) \frac{\partial F}{\partial x_2}(\tilde{\gamma}(t))$$

also $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}_1'(t) e_1 + \tilde{\gamma}_2'(t) e_2$. Also gilt $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} \gamma'(t) = 0$ genau dann, wenn

$$\tilde{\gamma}_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}_i'(t) \tilde{\gamma}_j'(t) = 0$$

für $k = 1, 2$. Existenz und Eindeutigkeit für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert damit den folgenden Satz.

Satz. *Sei $v \in T_pS$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Geodätische $\gamma\colon [0, \varepsilon) \to S$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.*

Bemerkung. Im Allgemeinen existiert die Lösung nicht für alle Zeiten.

Beispiel (Sphäre S^2_R vom Radius $R > 0$)**.** Betrachte

$$\gamma_\varphi\colon \mathbb{R} \to S^2_R, \theta \mapsto (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi)$$

mit $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ fest. Dann ist $\gamma'_\varphi(\theta) = (-R\cos\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\cos\theta, 0)$ und $\gamma''_\varphi(\theta) = (-R\cos\varphi\cos\theta, -R\cos\varphi\sin\theta, 0)$, $N(\gamma_\varphi(\theta)) = \frac{1}{R} = \gamma_\varphi(\theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$. Damit erhält man

$$\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta}\gamma'_\varphi(\theta) = \gamma''_\varphi(\theta) - \Big\langle \gamma''_\varphi(\theta), N(\gamma_\varphi(\theta))\Big\rangle N(\gamma_\varphi(\theta)) = R\begin{pmatrix} -\cos\varphi\cos\theta + \cos^3\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta + \cos^3\varphi\sin\theta \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Also ist $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta}\gamma'_\varphi(\theta) = 0$ für alle θ genau dann, wenn $\varphi = 0$. Also ist γ_φ eine Geodätische genau dann, wenn $\varphi = 0$, d.h. γ_φ parametrisiert den Äquator.

Bemerkung. Ist $\phi\colon S \to \widetilde{S}$ eine lokale Isometrie und $\gamma\colon I \to S$ eine Geodätische, so ist $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma$ eine Geodätische.

Bemerkung. Die Geodätischen auf S^2_R sind gerade die (parametrisierten) Großkreise.

Die Geodätischengleichung taucht natürlich bei der Frage nach kürzesten Verbindungskurven zwischen $p, q \in S$ auf. Sei $\gamma\colon [a,b] \to S$ eine Kurve mit $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$. Neben der Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)}\,\mathrm{d}t$$

betrachtet man dabei auch die *Energie*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b g_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Lemma. *Es gilt: $L(\gamma)^2 \le 2(b-a)E(\gamma)$ mit Gleichheit genau dann, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $g_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)$ ist konstant.*

Beweis. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$L(\gamma)^2 \le \int_a^b g_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{d}t = 2(b-a)E(\gamma).$$ □

Korollar. *γ minimiert die Energie genau dann, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist und die Länge minimiert.*

Satz (1. Variation der Energie)**.** *Seien $p, q \in S$ und $H\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to S$ differenzierbar, so dass für $\gamma_s\colon [a,b] \to S, t \mapsto H(s,t)$ gilt: $\gamma_s(a) = p$ und $\gamma_s(b) = q$. Dann gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} E(\gamma_s) = -\int_a^b g_{\gamma(t)}\big(V(t), \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

mit $\gamma = \gamma_0$ und $V(t) = \frac{\partial H}{\partial s}(0,t)$.

Beweis. Es ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{1}{2}\int_a^b \langle \gamma_s'(t), \gamma_s'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}(0,t), \gamma'(t)\right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \langle V'(t), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V(t), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t - \int_a^b \langle V(t), \gamma''(t)\rangle \,\mathrm{d}t =$$
$$= -\int_a^b \langle V(t), \gamma''(t)\rangle \,\mathrm{d}t = -\int_a^b \left\langle V(t), \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t)\right\rangle \mathrm{d}t$$

da $V(t) \in T_{\gamma(t)}S$. □

Korollar. *Hat $\gamma\colon [a,b] \to S$ minimale Energie unter allen Kurven $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to S$ mit $\tilde{\gamma}(a) = p$, $\tilde{\gamma}(b) = q$, so gilt $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$, d.h. γ ist Geodätische.*

Beweis. Angenommen $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t) \neq 0$ für ein $t \in (a,b)$. Sei $F\colon U \to V \cap S$ mit $\gamma(t_0) \in V$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subseteq (a,b)$ und $\gamma([t_0-\delta, t_0+\delta]) \subseteq V$. Sei $\tilde{\gamma}\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \to U$, $\tilde{\gamma}(t) = F^{-1}(\gamma(t))$ und $X(t) = DF(\tilde{\gamma}(t))^{-1}\big(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t)\big)$ für $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$. Wähle $\varphi\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varphi \geq 0$, $\varphi(t_0) > 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Definiere

$$\gamma_s(t) = \begin{cases} F(\tilde{\gamma}(t) + s\varphi(t)X(t)) & t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ \gamma(t) & t \in [a,b] \setminus [t_0-\delta, t_0+\delta] \end{cases}$$

mit $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Dann gilt

$$V(t) = \begin{cases} DF(\tilde{\gamma}(t))(\varphi(t)X(t)) = \varphi(t)\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t) & t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ 0 & t \in [a,b] \setminus [t_0-\delta, t_0+\delta] \end{cases}$$

Mit Satz folgt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} E(\gamma_s) = -\int_a^b g_{\gamma(t)}\big(V(t), \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t)\big) \,\mathrm{d}t =$$
$$= -\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) g_{\gamma(t)}\big(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t), \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\gamma'(t)\big) \,\mathrm{d}t < 0$$

im Widerspruch zur Energieminimalität von γ. □

3.5 Der Satz von Gauß-Bonnet

Zunächst sei $X\colon U \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld und $x_0 \in U$ eine isolierte Nullstelle, d.h. $X(x_0) = 0$ aber es existiert $\varepsilon > 0$ mit $X(x) \neq 0$ für $x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass x_0 die einzige Nullstelle von X auf U ist. Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein betrachte

$$\gamma_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to U, t \mapsto x_0 + \varepsilon(\cos t, \sin t).$$

Wir betrachten eine Winkelfunktion $\Theta_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\widetilde{X}(t) = X(\gamma_\varepsilon(t))/\|X(\gamma_\varepsilon(t))\| \in S^1$, d.h. $\widetilde{X}(t) = \big(\cos\Theta(t), \sin\Theta(t)\big)$.

Definition. Es heißt

$$\operatorname{ind}(X,p) = \frac{1}{2\pi}\big(\Theta_\varepsilon(2\pi) - \Theta_\varepsilon(0)\big) \in \mathbb{Z}$$

der *Index* von X in p.

Bemerkung. Das ist unabhängig von der Wahl von ε, denn es gilt allgemeiner:

Lemma. *Sei $x_0 \in U$ die einzige Nullstelle von X auf U. Sind $\gamma, \tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to U$ (periodisch mit Periode $T > 0$)* homotop, *d.h. es existiert eine* Homotopie $H\colon \mathbb{R}\times[0,1] \to U$ *(stetig) mit $H(t+T,s) = H(t,s)$, $H(t,0) = \gamma(t)$ und $H(t,1) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $s \in [0,1]$, so gilt*

$$\Theta_{\tilde{\gamma}}(T) - \Theta_{\tilde{\gamma}}(0) = \Theta_\gamma(T) - \Theta_\gamma(0)$$

Beweis. Betrachte $R = [0,T]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. X is sternförmig bezüglich $(0,0)$, also existiert eine Winkelfunktion $\Theta_H\colon R \to \mathbb{R}$ für $\widetilde{X} \circ H\colon R \to S^1$. Dann ist $\Theta_H(T,0) - \Theta_H(0,0) = \Theta_H(T,0) - \Theta_H(T,1) + \Theta_H(T,1) - \Theta_H(0,1) + \Theta_H(0,1) - \Theta_H(0,0) = \Theta_{\tilde{\gamma}}(T) - \Theta_{\tilde{\gamma}}(0)$ wegen der Periodizität von Θ_H. $\square$

Bemerkung. Für differenzierbares X und eine periodische Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to U \setminus \{x_0\}$ mit Periode $T > 0$ gilt

$$\Theta_\gamma(T) - \Theta_\gamma(0) = \int_0^T \big(\widetilde{X}_1(t)\widetilde{X}_2'(t) - \widetilde{X}_2(t)\widetilde{X}_1'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \det\begin{pmatrix}\widetilde{X}_1(t) & \widetilde{X}_1'(t)\\ \widetilde{X}_2(t) & \widetilde{X}_2'(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

für $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2) = \frac{X}{\|X\|} \circ \gamma$, denn mit $\widetilde{X}(t) = \big(\cos\Theta_\gamma(t), \sin\Theta_0(t)\big)$ ist $\widetilde{X}'(t) = \Theta_\gamma'(t)\big(-\widetilde{X}_2(t), \widetilde{X}_1(t)\big)$, also $\widetilde{X}_1(t)\widetilde{X}_2'(t) - \widetilde{X}_2(t)\widetilde{X}_1'(t) = \Theta_\gamma'(t)\big(\tilde{X}_1(t)^2 + \tilde{X}_2(t)^2\big) = \Theta_\gamma'(t)$.

Sei jetzt $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche, orientiert durch das Einheitsnormalenfeld N. Sei $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld mit isolierter Nullstelle $p \in S$. Sei $U \subseteq S$ offen mit $p \in U$, so dass p die einzige Nullstelle von X auf U ist. Sei $\{e_1, e_2\}$ ein positiv orientiertes Orthonormalbasenfeld auf U, d.h. $e_i\colon U \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder, $g(e_i(x), e_j(x)) = \delta_{ij}$ und $\{e_1(x), e_2(x), N(x)\}$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Schreibe $X = X_1e_1 + X_2e_2$, $X_i\colon U \to \mathbb{R}$, bzw. $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1e_1 + \widetilde{X}_2e_2$ mit $\widetilde{X} = g(X,X)^{1/2}X$. Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist $S \setminus B_\varepsilon(p) =: S_\varepsilon$ eine Fläche mit Rand $\partial S_\varepsilon \simeq S^1$. Sei $\gamma_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \partial S_\varepsilon$ eine Parametrisierung von ∂S_ε mit Periode $T > 0$, so dass $\nu = J\gamma'$ der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor ist; hier sei $J_p\colon T_pS \to T_pS$ die Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn, d.h. für $v \in T_pS \setminus \{0\}$ gilt $g_p(v, J_pv) = 0$ und $\{v, J_pv, N(p)\}$ ist positiv orientiert in $\mathbb{R}^3$. Sei $\Theta_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion für $(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, d.h. $(\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)) = (\cos\Theta_\varepsilon(t), \sin\Theta_\varepsilon(t))$.

Definition. Es heißt

$$\operatorname{ind}(X,p) = \frac{1}{2\pi}\big(\Theta_\varepsilon(T) - \Theta_\varepsilon(0)\big)$$

heißt der *Index* von X in p.

Bemerkung. Wie oben zeigt man, dass die Definition unabhängig von ε ist.

Bemerkung. Für U hinreichend klein existiert $\{e_1, e_2\}$ wie oben: Wende Gram-Schmidt auf ein von einer orientierungserhaltenden lokalen Parametrisierung kommendes Basenfeld an.

Bemerkung. Die Definition hängt nicht von der Wahl des positiv orientierten Orthonormalbasenfelds ab, denn zwei Wahlen $\{e_1, e_2\}$ und $\{e'_1, e'_2\}$ unterscheiden sich durch eine Abbildung $A\colon U \to SO(2)$, d.h. $e'_i = \sum A_{ji}(x)e_j(x)$ für alle $x \in U$, also auch $\widetilde{X}_i(x) = \sum A_{ij}(x)\widetilde{X}'_j(x)$ für alle $x \in U$. Damit folgt, dass $(\widetilde{X}_1 \circ \gamma_\varepsilon, \widetilde{X}_2 \circ \gamma_\varepsilon)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $(\widetilde{X}'_1 \circ \gamma_\varepsilon, \widetilde{X}'_2 \circ \gamma_\varepsilon)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homotop sind, da $\overline{B_\varepsilon(p)} \cap S \simeq D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Satz (Gauß-Bonnet I)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Sei $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld mit isolierten Nullstellen $p_1, \dots, p_k \in S$. Dann gilt:*

$$\int_S K \,\mathrm{d}A = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(X, p_i).$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist $S_\varepsilon = S \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(p_i)$ eine kompakte Fläche mit Rand $\partial S_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^k (\partial S_\varepsilon)_i$ mit $(\partial S_\varepsilon)_i \simeq S^1$. Sei $\gamma_i\colon \mathbb{R} \to (\partial S_\varepsilon)_i$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode $T_i > 0$ wie oben, d.h. $\nu_i := J\gamma'_i$ ist der nach außen zeigende Einheitsnormalenvektor. Betrachte jetzt auf $S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ die Vektorfelder $e_1 := g(X, X)^{-1/2}X$ und $e_2 = Je_1$. D.h. $\{e_1, e_2\}$ ist ein positiv orientiertes Orthonormalbasenfeld auf $S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Insbesondere gilt

$$0 = Yg(e_i, e_j) = g(\nabla_Y e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_Y e_j),$$

also $g(\nabla_Y e_i, e_j) = -g(e_i, \nabla_Y e_j)$ und $g(\nabla_Y e_i, e_i) = 0$, mit anderen Worten $\nabla_Y e_i \perp e_i$ und $\nabla_Y e_1 = g(\nabla_Y e_1, e_2)e_2$ und $\nabla_Y e_2 = g(\nabla_Y e_2, e_1)e_1$. Für die Gaußkrümmung gilt

$$\begin{aligned}
K &= g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = g(\nabla^2_{e_1,e_2} e_2, e_1) - g(\nabla^2_{e_2,e_1} e_2, e_1) = \\
&= g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2, e_1) - g(\nabla_{\nabla_{e_1}e_2} e_2, e_1) - g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_2, e_1) + g(\nabla_{\nabla_{e_2}e_1} e_2, e_1) = \\
&= g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2, e_1) - g(\nabla_{e_1} e_2, e_1)g(\nabla_{e_1} e_2, e_1) - \\
&\quad - g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_2, e_1) + g(\nabla_{e_2} e_1, e_2)g(\nabla_{e_2} e_2, e_1) = \\
&= g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2, e_1) + g(\nabla_{e_1} e_1, \nabla_{e_1} e_1) + g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_1, e_2) - g(\nabla_{e_2} e_2, \nabla_{e_2} e_2) = \\
&= g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2, e_1) - g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_1} e_1, e_1) + g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_1, e_2) + g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_2} e_2, e_2) = \\
&= g(\nabla_{e_1} Z, e_1) + g(\nabla_{e_2} Z, e_2) = \operatorname{div} Z.
\end{aligned}$$

mit $Z = \nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{e_2} e_2$. Also folgt nach Stokes

$$\int_{S_\varepsilon} K \,\mathrm{d}A = \int_{S_\varepsilon} \operatorname{div} Z \,\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{k} \int_{(\partial S_\varepsilon)_i} g(Z, \nu_i) \,\mathrm{d}s.$$

Es gilt nun $\nu_i = J\gamma'_i = g(J\gamma'_i, e_1)e_1 + g(J\gamma'_i, e_2)e_2 = -g(\gamma'_i, Je_1)e_1 - g(\gamma'_i, Je_2)e_2$, also $\nu_i = g(\gamma'_i, e_1)e_2 - g(\gamma'_i, e_2)e_1$, und $Z = g(\nabla_{e_2} e_2, e_1, e_1)e_1 + g(\nabla_{e_1} e_1, e_2)e_2$. Damit folgt

$$g(Z, \nu_i) = -g(\gamma'_i, e_2)g(\nabla_{e_2} e_2, e_1) + g(\gamma'_i e_1)g(\nabla_{e_1} e_1, e_2) = g(\nabla_{\gamma'_i} e_1, e_2).$$

Also
$$\int_{(\partial S_\varepsilon)_i} g(Z,\nu_i)\,\mathrm{d}s = \int_0^{T_i} g\big(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} e_1(t), e_2(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
Sei $\{\tilde e_1, \tilde e_2\}$ ein Referenz-Orthonormalbasenfeld nahe p_i. Wir schreiben $e_1(t) = f_1(t)\tilde e_1(t) + f_2(t)\tilde e_2(t)$ und wählen eine Winkelfunktion $\Theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1 = \cos\Theta$ und $f_2 = \sin\Theta$. Dann ist

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} e_1(t) &= \sum_i f_i'(t)\tilde e_i(t) + f_i(t)\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_i(t) = \\ &= -\Theta'(t) f_2(t)\tilde e_1(t) + f_1(t)\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_1(t) + \Theta'(t) f_1(t)\tilde e_1(t) + f_2(t)\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_2(t)\end{aligned}$$

und mit $e_2(t) = f_1(t)\tilde e_2(t) - f_2(t)\tilde e_1(t)$ folgt

$$\begin{aligned}g(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} e_1(t), e_2(t)) &= \Theta'(t)(f_1(t)^2 + f_2(t)^2) + f_1(t)^2 g(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_1(t), \tilde e_2(t)) - \\ &\quad - f_2(t)^2 g(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_2(t), \tilde e_1(t)) = \\ &= \Theta'(t) + g(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_1(t), \tilde e_2(t))\end{aligned}$$

Also folgt mit Stokes

$$\begin{aligned}\int_S K\,\mathrm{d}A &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} K\,\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{T_i}\Theta'(t)\,\mathrm{d}s + \int_0^{T_i} g(\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\tilde e_1(t), \tilde e_2(t))\,\mathrm{d}s = \\ &= \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{T_i}\Theta'(t)\,\mathrm{d}s \pm \int_{\overline{B_\varepsilon(p_i)}\cap S} \operatorname{div}\widetilde Z\,\mathrm{d}A = 2\pi\sum_{i=1}^k \operatorname{ind}(X, p_i).\end{aligned}$$

für $\widetilde Z = \nabla_{\tilde e_1}\tilde e_1 + \nabla_{\tilde e_2}\tilde e_2$. ☐

Korollar. *Insbesondere hängt $\sum \operatorname{ind}(X, p_i)$ nicht von X ab.*

Satz. *Ist $S \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, so existiert ein Vektorfeld $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit isolierten Nullstellen.*

Beweisskizze. Für $a \in S^2$ betrachte die Höhenfunktion $f_a\colon S \to \mathbb{R}, p \mapsto \langle p, a\rangle$. Man hat folgenden Fakt aus der Morse-Theorie: Für fast alle $a \in S^2$ ist f_a eine Morsefunktion, d.h. $\operatorname{grad} f_a(p) = 0 \implies \operatorname{Hess} f_a(p)$ ist nicht ausgeartet. Das heißt, $X := \operatorname{grad} f_a$ hat isolierte Nullstellen.

Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche. Wir definieren die *Eulercharakteristik*

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^k \operatorname{ind}(X, p_i)$$

für ein beliebiges Vektorfeld X mit isolierten Nullstellen $p_1, \dots, p_k \in S$.

Bemerkung. Sind S und $\widetilde S$ orientierungserhaltend diffeomorph, so ist $\chi(S) = \chi(\widetilde S)$.

Beweis. Ist $\phi\colon S \to \widetilde{S}$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen $p_1, \dots, p_k \in S$, so definiert

$$\widetilde{X}(\tilde{p}) = D\phi(\phi^{-1}(\tilde{p}))\big(X(\phi^{-1}(\tilde{p}))\big)$$

ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen $\tilde{p}_i = \phi(p_i)$ und $\operatorname{ind}(\widetilde{X}, \tilde{p}_i) = \operatorname{ind}(X, p_i)$. □

Satz (Gauß-Bonnet II). *Ist $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Dann ist*

$$\int_S K \,\mathrm{d}A = 2\pi\chi(S).$$