Vorlesung aus dem Wintersemester 2013/14

Globale Analysis

Priv.-Doz. Dr. Hartmut Weiß

geTEXt von Florian Stecker und Viktor Kleen

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialoperatoren	3
2	Sobolevräume	8
3	Lokale Theorie	10
4	Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathbb{R}^n$	14
5	Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten	22
6	Elliptizität und Parametrix	24
7	Fredholmoperatoren und Index	27
8	Elliptische Komplexe und Hodgetheorie	31
9	Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung	33
10	Diracoperatoren	37
11	Die Spindarstellung	44
12	Spinstrukturen	47
13	Diracbündel	51
14	Ausblick zu Indexsätzen	53

Einführung

Wir beginnen mit einer glatten Manngifaltigkeit M von Dimension n zusammen mit einem glatten komplexen oder reellen Vektorbündel $\pi\colon E \longrightarrow M$ auf M. Mit $\Gamma(E) = \Gamma(M; E)$ bezeichnen wir die Menge der glatten Schnitte von E. Wir werden den Begriff eines *Differentialoperators* $L\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ definieren und das *Hauptsymbol* $\sigma(L) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM \otimes \mathrm{Hom}(E, F))$ eines Solchen einführen. Es kodiert den Anteil höchster Ordnung von L. Gegeben einen Kovektor $\xi \in T_p^\vee M$ können wir $\sigma(L)\xi \in \mathrm{Hom}(E_p, F_p)$ betrachten; der Differentialoperator L heißt *elliptisch*, wenn $\sigma(L)\xi$ für alle $\xi \neq 0$ invertierbar ist.

Anschließend werden wir elliptische Regularitätstheorie behandeln. Insbesondere werden wir sehen, dass L einen Fredholmoperator $W^{\ell+k,2}(E) \longrightarrow W^{\ell,2}(E)$ definiert, was uns erlaubt den Index $\mathrm{ind}(L) \in \mathbb{Z}$ zu behandeln. Außerdem werden wir die elliptische Abschätzung $\|s\|_{W^{\ell+k,2}} \leqslant C(\|s\|_{W^{\ell,2}} + \|Ls\|_{W^{\ell,2}})$ beweisen und das Weylsche Lemma folgern: Aus $s \in W^{k,2}$ und $Ls = 0$ folgt schon $s \in C^\infty$. Als Anwendung ergibt sich die Charakterisierung der Lösbarkeit von elliptischen Differentialgleichungen und für symmetrische Operatoren die zugehörige Spektraltheorie und Spektralgeometrie.

Als nächstes werden uns geometrische Differentialoperatoren beschäftigen. Zum Beispiel liefert der de Rham–Komplex $(\Omega^\bullet(M), d)$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf natürliche Weise elliptische Operatoren $D = d + \delta$ und $\Delta = d\delta + \delta d$. Als Anwendung ergibt sich Hodge–Theorie: $\Omega^k(M) = \ker \Delta^k \oplus \mathrm{im}\, \delta^{k+1} \oplus \mathrm{im}\, d^{k-1}$ und $H^k_{dR}(M) \cong \ker \Delta^k$. Für Kählermannigfaltigkeiten bekommt man mit Hilfe des Dolbeault–Komplexes eine Verfeinerung der Hodge–Zerlegung, den so genannten Hodge-Diamanten. Ebenso werden wir Dirac–Operatoren betrachten, gewisse natürliche Operatoren erster Ordnung auf Spinmannigfaltigkeiten.

Im dritten Teil der Vorlesung werden wir auf Indextheorie eingehen. Für geschlossene Mannigfaltigkeiten M und elliptische Differentialoperatoren L haben wir den Index $\mathrm{ind}(L)$. Indextheorie befasst sich mit der Aufgabe, diesen Index aus topologischen und geometrischen Daten zu berechnen. Man erhält schlussendlich die Indexformel von Atiyah–Singer: Ist D ein Diracoperator auf einer Spinmannigfaltigkeit M von Dimension n, so gilt

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \widehat{A}(TM),$$

wobei $\widehat{A}$ das $\widehat{A}$–*Geschlecht* bezeichnet, eine bestimmte *charakteristische Klasse*. Letzere werden wir differentialgeometrisch mittels Chern–Weil–Theorie einführen. Weitere Sätze in diesem Gebiet sind der Satz von Chern–Gauß–Bonnet, der Signatursatz und der Satz von Riemann–Roch–Hirzebruch. Eine wichtige Anwendung ist: Trägt M eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung, so ist immer $\widehat{A} = 0$. Man erhält also eine Obstruktion für die Existenz einer solchen Metrik.

1 Differentialoperatoren

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit glatten komplexen Vektorbündeln E und F. Wir schreiben häufig $n = \dim M$, $r = \operatorname{rk} E$ und $s = \operatorname{rk} F$, sowie $\Gamma(E)$ bzw. $\Gamma(F)$ für die Räume der glatten Schnitte von E bzw. F. Außerdem schreiben wir $C^\infty(M)$ für die Menge der glatten Funktionen auf M mit Wert in $\mathbb{C}$. So werden $\Gamma(E)$ und $\Gamma(F)$ auf natürliche Weise zu Moduln über $C^\infty(M)$.

Lemma 1.1. *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus* $\operatorname{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(F)) \cong \Gamma(\operatorname{Hom}(E, F))$.

Wir schreiben $\operatorname{ad}(f)L$ für den formalen Kommutator $[f, L] = fL - Lf$ von $f \in C^\infty(M)$ mit einem beliebigen $\mathbb{C}$–linearen Operator $L \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$. Das heißt, die Abbildung $\operatorname{ad}(f)$ ist ein Endomorphismus von $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\Gamma(E), \Gamma(F))$. Es ergibt sich die Charakterisierung

$$\Gamma(\operatorname{Hom}(E, F)) \cong \operatorname{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(F)) = \bigcap_{f \in C^\infty(M)} \ker \operatorname{ad}(f).$$

Definition 1.2. Ein *partieller Differentialoperator von höchstens Ordnung 0* von E nach F ist ein Vektorbündelhomomorphismus $E \longrightarrow F$ oder äquivalenterweise ein $C^\infty(M)$–linearer Operator $\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$, bzw. ein $\mathbb{C}$–linearer Operator L mit $\operatorname{ad}(f)L = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

Induktiv ist ein *partieller Differentialoperator von höchstens Ordnung* k von E nach F ein $\mathbb{C}$–linearer Operator $L \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$, so dass $\operatorname{ad}(f)L$ für alle $f \in C^\infty(M)$ ein partieller Differentialoperator von höchstens Ordnung $k - 1$ ist.

Wir schreiben $\operatorname{PDO}^{(k)}(E, F)$ für die Menge der partiellen Differentialoperatoren von höchstens Ordnung k von E nach F. Außerdem setzen wir

$$\operatorname{PDO}(E, F) = \bigcup_{k \geqslant 0} \operatorname{PDO}^{(k)}(E, F)$$

und $\operatorname{PDO}^k(E, F) = \operatorname{PDO}^{(k)}(E, F) \setminus \operatorname{PDO}^{(k-1)}(E, F)$. Im Fall $E = F$ schreiben wir abkürzend $\operatorname{PDO}^*(E)$ anstatt $\operatorname{PDO}^*(E, E)$.

Bemerkung 1.3. Es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{PDO}(E)$ eine filtrierte Algebra ist, d. h. für $P \in \operatorname{PDO}^{(k)}(E)$ und $Q \in \operatorname{PDO}^{(\ell)}(E)$ ist $P \circ Q \in \operatorname{PDO}^{(k+\ell)}(E)$.

Beispiel 1.4.

(i) Sei $M = U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $E = U \times \mathbb{C}^r$ und $F = U \times \mathbb{C}^s$. Dann gilt natürlich $\Gamma(E) = C^\infty(U, \mathbb{C}^r)$, $\Gamma(F) = C^\infty(U, \mathbb{C}^s)$ und $\Gamma(\operatorname{Hom}(E, F)) = C^\infty(U, \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$. Betrachte für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die i–te Koordinatenableitung ∂_i auf $C^\infty(M)$. Für $f, s \in C^\infty(M)$ berechnet man

$$(\operatorname{ad}(f)\partial_i)s = [f, \partial_i]s = f(\partial_i s) - \partial_i(fs) = -(\partial_i f)s.$$

Also ist ∂_i ein partieller Differentialoperator höchstens 1. Ordnung. Diese Rechnung zeigt auch, dass Vektorfelder immer Differentialoperatoren höchstens 1. Ordnung definieren. Sei allgemeiner

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dann ist eine Linearkombination $L = \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha(x)\partial^\alpha$ für $A_\alpha \in C^\infty(U, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$ ein partieller Differentialoperator mit Ordnung höchstens k.

(ii) Seien E und F reelle Vektorbündel über M mit Komplexifizierungen $E_{\mathbb{C}}$ und $F_{\mathbb{C}}$. Auf letzteren ist eine *reelle Struktur* durch komplexe Konjugation gegeben. Ein komplexer Differentialoperator $L \in \mathrm{PDO}(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ ist genau dann *reell*, wenn L mit der komplexen Konjugation kommutiert. Das ist genau dann der Fall, wenn L durch Komplexifizierung aus einem reellen Differentialoperator $L_{\mathbb{R}} \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ hervorgeht.

(iii) Das de Rham–Differential $d \colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ liefert ein reelles Element in $\mathrm{PDO}^{(1)}(E, F)$ für die Bündel $E = \Lambda^k T^\vee M \otimes \mathbb{C}$ und $F = \Lambda^{k+1} T^\vee M \otimes \mathbb{C}$, denn es gilt

$$(\mathrm{ad}(f)d)\omega = f(d\omega) - d(f\omega) = -df \wedge \omega$$

und $\xi \wedge \_$ ist ein Bündelhomomorphismus.

(iv) Sei E ein Vektorbündel mit einem $GL_r(\mathbb{C})$–Zusammenhang $\nabla \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^\vee M \otimes E)$. Dann liefert ∇ ein Element in $\mathrm{PDO}^{(1)}(E, T^\vee M \otimes E)$, denn

$$(\mathrm{ad}(f)\nabla)s = f(\nabla s) - \nabla(fs) = -df \otimes s$$

und $\xi \otimes \_$ ist ein Bündelhomomorphismus.

Lemma 1.5. *Differentialoperatoren sind lokal, d. h.* $\operatorname{supp} Ls \subset \operatorname{supp} s$ *für alle* $s \in \Gamma(E)$ *und Differentialoperatoren* $L \in \mathrm{PDO}^{(k)}(E, F)$.

Beweis. Das ist klar für $k = 0$. Für $k > 0$ und $U \supset \operatorname{supp} s$ offen wähle $f \in C^\infty(M)$ mit $f|_{\operatorname{supp} s} = 1$ und $f|_{M \setminus U} = 0$. Dann gilt

$$Ls = L(fs) = [L, f]s + f(Ls)$$

und nach Induktion folgt wegen $[L, f] \in \mathrm{PDO}^{(k-1)}$, dass $\operatorname{supp} Ls \subset \overline{U}$. Da U beliebig war, folgt bereits $\operatorname{supp} Ls \subset \operatorname{supp} s$. $\square$

Bemerkung 1.6. Insbesondere hängt der Wert $(Ls)(p) \in F_p$ für $p \in M$ nur vom *Keim* von s in p ab. Ist $\varphi \colon U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M mit Bündelkarten $\phi^E \colon E|_U \longrightarrow V \times \mathbb{C}^r$ und $\phi^F \colon F|_U \longrightarrow V \times \mathbb{C}^s$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(E|_U) \arrow[r, "L|_U"] \arrow[d, "\cong"'] & \Gamma(F|_U) \arrow[d, "\cong"] \\
C^\infty(V, \mathbb{C}^r) \arrow[r, "P"'] & C^\infty(V, \mathbb{C}^s)
\end{tikzcd}$$

für $P \in \mathrm{PDO}(\underline{\mathbb{C}}^r, \underline{\mathbb{C}}^s)$. Später werden wir sehen, dass dann P von der Form $\sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha \partial^\alpha$ für gewisse A_α ist.

Sei $L \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$. Dann ist $\mathrm{ad}(f_1) \cdots \mathrm{ad}(f_k)L$ für alle $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M)$ ein Bündelhomomorphismus von E nach F. Wir schreiben in Zukunft abkürzend $\mathrm{ad}(f_1) \cdots \mathrm{ad}(f_k) = \mathrm{ad}(f_1, \ldots, f_k)$. Es gilt

$$\mathrm{ad}(f)\,\mathrm{ad}(g)L = [f, [g, L]] = -[g, [L, f]] = \mathrm{ad}(g)\,\mathrm{ad}(f)L.$$

nach der Jacobiidentität. Es folgt, dass $\mathrm{ad}(f_1, \ldots, f_k)L$ symmetrisch in den f_i ist. Fixiere $p \in M$ und betrachte das Ideal $I_p = \{f \in C^\infty(M) \colon f(p) = 0\}$ in $C^\infty(M)$. Ist $f_1 = gh$ für $g, h \in I_p$, d. h. insbesondere $f_1 \in I_p^2$, dann gilt, für $P = \mathrm{ad}(f_2, \ldots, f_k)L \in \mathrm{PDO}^{(1)}$:

$$\mathrm{ad}(f_1, \ldots, f_k)L = \mathrm{ad}(gh)\,\mathrm{ad}(f_2, \ldots, f_k)L = [gh, P] = g[h, P] + [g, P]h = g(\mathrm{ad}(h)P) + (\mathrm{ad}(g)P)h.$$

Insbesondere ist $(\mathrm{ad}(f_1,\dots,f_k)L)s(p) = 0$ für alle Schnitte $s \in \Gamma(E)$. Es folgt, dass die Abbildung $(-i)^k/k!\ \mathrm{ad}(\_,\dots,\_)L$ zu einem Homomorphismus

$$\sigma_p(L)\colon (I_p/I_p^2)^k \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_p, F_p)$$

mit $\sigma_p(L)([f_1],\dots,[f_k]) = (-i)^k/k!\ \mathrm{ad}(f_1,\dots,f_k)L(p)$ absteigt. Man hat einen kanonischen $\mathbb{C}$–Isomorphismus $I_p/I_p^2 \cong T_p^\vee M \otimes \mathbb{C}$ mit $[f] \longmapsto df(p)$ und schließlich erhält man das *Hauptsymbol* von L in p:

$$\sigma_p(L)\colon \mathrm{Sym}^k(T_p^\vee M \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_p, F_p).$$

Wir schreiben $\sigma_p(L)(\xi) = \sigma_p(L)(\xi,\dots,\xi)$.

Man kann die symmetrische Potenz $\mathrm{Sym}^k V^\vee$ eines Vektorraums V mit den homogenen Polynomfunktion von Grad k auf V identifizieren. Die Rekonstruktion von $\sigma \in \mathrm{Sym}^k V^\vee$ aus der zugeordneten Polynomfunktion geschieht mittels der *Polarisierungsidentität*

$$\sigma(v_1,\dots,v_n) = \frac{1}{k!}\partial_{t_1}\dots\partial_{t_k}\sigma\left(\sum t_i v_i\right)\bigg|_{t_1=\dots=t_k=0}$$

Für $f_1,\dots,f_k \in C^\infty(M)$ gilt

$$\frac{(-i)^k}{k!}(\mathrm{ad}(f_1,\dots,f_k)L)(p) = (\sigma_p L)(df_1(p),\dots,df_k(p)),$$

denn eine Abänderung der f_i von $f_i(p)$ ändert weder $\mathrm{ad}(f_1,\dots,f_k)$ noch $df_i(p)$. Es folgt, dass sich die $\sigma_p L$ zu einem globalen Schnitt $\sigma(L) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM \otimes \mathrm{Hom}(E,F))$ zusammensetzen lassen.

Definition 1.7. Der Schnitt $\sigma(L)$ ist das *Hauptsymbol* von $L \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$.

Lemma 1.8.

(i) *Sind* $P \in \mathrm{PDO}^k(E_1,E_2)$ *und* $L \in \mathrm{PDO}^\ell(E_0,E_1)$ *und* $\sigma(P)\xi \circ \sigma(Q)\xi \neq 0$ *für ein* $\xi \in T^\vee M$, *so ist* $P \circ Q \in \mathrm{PDO}^{k+\ell}(E_0,E_2)$ *und es gilt* $\sigma(P\circ Q)\xi = \sigma(P)\xi \circ \sigma(Q)\xi$ *für alle* $\xi \in T^\vee M$.

(ii) *Ist* $P, Q \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$ *und* $\sigma(P) = \sigma(Q)$, *so ist* $P - Q \in \mathrm{PDO}^{(k-1)}(E,F)$.

Beweis.

(i) Wir hatten eingesehen, dass $\mathrm{ad}(f)(P\circ Q) = \mathrm{ad}(f)P\circ Q + P \circ \mathrm{ad}(f)Q$. Eine einfache Induktion liefert

$$\mathrm{ad}(f)^m(P\circ Q) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\mathrm{ad}(f)^j P \circ \mathrm{ad}(f)^{m-j}Q.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{ad}(f)^{k+\ell}(P\circ Q) = \binom{k+\ell}{k}\mathrm{ad}(f)^k P \circ \mathrm{ad}(f)^\ell Q.$$

Also gilt

$$\sigma(P\circ Q)\xi = \frac{(-i)^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\mathrm{ad}(f)^{k+\ell}(P\circ Q) = \sigma(P)\xi\circ\sigma(Q)\xi.$$

(ii) Es ist $\mathrm{ad}(f)^k(P-Q) = \mathrm{ad}(f)^k P - \mathrm{ad}(f)^k Q = 0$. □

Beispiel 1.9.

(i) Sei $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $E = U \times \mathbb{C}^r$, $F = U \times \mathbb{C}^s$. Sei zunächst $r = s = 1$. Dann ist $\sigma(\partial_j)\xi = i\xi_j$ für $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Es gilt also
$$\sigma(\partial^\alpha) = i^{|\alpha|}\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$$
für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Oft schreibt man $D^\alpha = i^{-|\alpha|}\partial^\alpha$. Allgemeiner ist für $L = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha D^\alpha$ das Symbol
$$\sigma_p(L)\xi = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(p)\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}.$$
Umgekehrt ist jeder Differentialoperator $L\colon C^\infty(U, \mathbb{C}^r) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}^s)$ von der obigen Form: Sei $P \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ mit $\sigma(P)\xi = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$. Betrachte nun den Differentialoperator $Q = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha D^\alpha$. Dann gilt nach Konstruktion $\sigma(P) = \sigma(Q)$ und deshalb $P - Q \in \mathrm{PDO}^{(k-1)}(E, F)$. Nach Induktion folgt die Behauptung.

(ii) Sei $d\colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ das de Rham–Differential. Das Symbol von d ist
$$(\sigma_p d)\xi = (-i)(-\xi \wedge \_) = i\varepsilon(\xi),$$
wobei $\varepsilon(\xi)\colon \Lambda^k T^\vee M \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^{k+1} T^\vee M \otimes \mathbb{C}$ durch $\varepsilon(\xi) = \xi \wedge \_$ definiert ist.

(iii) Sei $\nabla\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^\vee M \otimes E)$ ein Zusammenhang auf E. Dann ist
$$(\sigma_p \nabla)\xi = i\xi \otimes \_\colon E_p \longrightarrow T_p^\vee M \otimes E_p.$$

Sei jetzt (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit von Dimension n, d. h. es ist eine *Volumenform* $\mathrm{dvol}^g \in \Gamma(\Lambda^n T^\vee M)$ gegeben. Ferner seien h^E und h^F hermitesche Metriken auf E und F.

Definition 1.10. Ein Operator $L^* \in \mathrm{PDO}(F, E)$ heißt *formal adjungiert* zu $L \in \mathrm{PDO}(E, F)$, falls gilt
$$\langle u, L^*v\rangle_2 = \int_M h^E(u, L^*v)\,\mathrm{dvol}^g = \int_M h^F(Lu, v)\,\mathrm{dvol}^g = \langle Lu, v\rangle_2$$
für alle Schnitte u und v mit kompaktem Träger.

Bemerkung 1.11.

(i) Es gibt höchstens einen formal adjungierten Operator zu L, denn sind P und Q formal adjungiert zu L, so gilt
$$\int_M h^E(u, (P - Q)v)\,\mathrm{dvol}^g = 0$$
für alle u, v. Es folgt, dass $P - Q = 0$.

(ii) Zu $L \in \mathrm{PDO}(E, F)$ existiert stets ein formal adjungierter Operator L^*.

Beispiel 1.12.

(i) Das de Rham–Differential $d\colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist formal adjungiert zu
$$\delta^g = (-1)^{nk+1}\star^g d\star^g\colon \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \Omega^k(M).$$
In der Tat ist
$$\int_M \langle d\eta, \xi\rangle\,\mathrm{dvol}^g = \int_M d\eta \wedge \star^g\xi = \int_M d(\eta \wedge \star^g\xi) - (-1)^k \int_M \eta \wedge d(\star^g\xi) =$$
$$= -(-1)^k(-1)^{k(n-k)} \int_M \eta \wedge \star^g(\star^g d(\star^g\xi)) = (-1)^{nk+1} \int_M \langle \eta, \star^g d\star^g\xi\rangle\,\mathrm{dvol}^g$$
für $\eta \in \Omega_c^k(M)$ und $\xi \in \Omega_c^{k+1}(M)$.

(ii) Sei $\nabla^E\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^\vee M \otimes E)$ ein unitärer Zusammenhang, d. h. es gilt eine „Produktregel“ $Xh^E(s_1,s_2) = h^E(\nabla_X s_1, s_2) + h^E(s_1, \nabla_X s_2)$. Sei $p \in M$ fix und $\{e_i\}$ ein lokaler Orthonormalrahmen um p, so dass $(\nabla^{TM} e_i)(p) = 0$ für alle i. Solch ein Rahmen heißt auch *synchroner Rahmen in* p. Sei außerdem $\{e^i\}$ der duale Korahmen. Dann gilt

$$\langle \nabla s, \eta \rangle = \left\langle \sum_i e^i \otimes \nabla_{e_i} s, \sum_j e^j \otimes \eta(e_j) \right\rangle = \sum_{i,j} \left\langle e^i, e^j \right\rangle \langle \nabla_{e_i} s, \eta(e_j) \rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i} s, \eta(e_i) \rangle .$$

Da ∇ ein unitärer Zusammenhang ist, folgt

$$\langle \nabla s, \eta \rangle = \sum_i \Big(e_i \langle s, \eta(e_i) \rangle - \langle s, (\nabla_{e_i} \eta)(e_i) \rangle \Big) = -\delta^g h^E(s,\eta) - \left\langle s, \operatorname{tr}^g_{1,2} \nabla \eta \right\rangle .$$

Durch Integration folgt $(\nabla^E)^* = -\operatorname{tr}^g_{1,2} \nabla^{T^\vee M \otimes E}$.

Definition 1.13. Ein Operator L heißt *formal selbstadjungiert*, falls $L^* = L$.

Beispiel 1.14. Der Operator $d + \delta\colon \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M)$ ist formal selbstadjungiert und heißt *Hodge–Dirac Operator*. Sein Quadrat ist $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ und heißt *Hodge-Laplace Operator*.

Propositio 1.15. *Für* $L \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$ *ist* $L^* \in \mathrm{PDO}^k(F,E)$ *und es gilt* $\sigma_p(L^*)\xi = (\sigma_p(L)\xi)^*$.

Beweis. Für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt $\operatorname{ad}(f)L^* = fL^* - L^*f = (Lf - fL)^* = -(\operatorname{ad}(f)L)^*$. Also folgt aus Induktion

$$\operatorname{ad}(f_1,\dots,f_k)L^* = (-1)^k (\operatorname{ad}(f_1,\dots,f_k)L)^*$$

für $f_1,\dots,f_k \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Wegen $\sigma_p(L)\xi = (-i)^k/k!\ \operatorname{ad}(f_1,\dots,f_k)L(p)$ gilt also

$$(\sigma_p(L)\xi)^* = \frac{i^k}{k!}(\operatorname{ad}(f_1,\dots,f_k)L)^* = \frac{(-i)^k}{k!}\sigma_p(L^*)\xi. \qquad \square$$

Beispiel 1.16. Ist $\nabla^E\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^\vee M \otimes E)$ ein unitärer Zusammenhang, so ist der *Zusammenhangslaplaceoperator* $\Delta^E = (\nabla^E)^* \nabla^E\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ formal selbstadjungiert. Obige Rechnung zeigt, dass $\Delta^E = -\operatorname{tr}^g_{1,2} \nabla^{T^\vee M \otimes E} \nabla^E$, d. h. bezüglich einem lokalen Orthonormalrahmen $\{e_i\}$ hat man

$$\Delta^E s = -\operatorname{tr}^g_{1,2} \nabla\nabla s = -\sum_i \Big(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i} s) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} s \Big).$$

Ist speziell $\{e_i\}$ synchron in p, so ist $\Delta^E s(p) = -\sum_i \nabla_{e_i}(\nabla_{e_i} s)(p)$.

Beispiel 1.17.

(i) Wegen $\sigma_p(d)\xi = i\varepsilon(\xi) = i\ \xi \wedge \_$ gilt $\sigma_p(\delta)\xi = -i\varepsilon(\xi)^* = -i\iota(\xi^\sharp) = -i\ \xi^\sharp \llcorner \_$. Es folgt also $\sigma_p(d+\delta) = i(\varepsilon(\xi) - \iota(\xi^\sharp))$ und $\sigma_p(\Delta)\xi = \varepsilon(\xi)\iota(\xi^\sharp) + \iota(\xi^\sharp)\varepsilon(\xi) = |\xi|^2$.

(ii) Analog ist $\sigma(\nabla^E)\xi = i\ \xi \otimes \_$ und $\sigma_p((\nabla^E)^*)\xi = -i(\xi \otimes \_)^*$. Außerdem ist

$$\left\langle \xi \otimes \eta, \sum_i e^i \otimes \omega(e_i) \right\rangle = \sum_i \left\langle \xi, e^i \right\rangle \langle \eta, \omega(e_i) \rangle = \left\langle \eta, \sum_i \left\langle \xi, e^i \right\rangle \omega(e_i) \right\rangle = \left\langle \eta, \operatorname{tr}^g_{1,2}(\xi \otimes \omega) \right\rangle$$

für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von T_pM und $\eta \in E_p$ sowie $\omega \in T_p^\vee M \otimes E_p$. Also ist $(\xi \otimes \_)^* = \operatorname{tr}^g_{1,2}(\xi \otimes \_)$ und für den Zusammenhangslaplaceoperator gilt $\sigma_p(\Delta^E)\xi = \operatorname{tr}^g_{1,2}(\xi \otimes \xi \otimes \_) = |\xi|^2$.

Definition 1.18. Ein Differentialoperator $L \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$ heißt *elliptisch*, wenn $\sigma_p(L)\xi\colon E_p \longrightarrow F_p$ für alle $p \in M$ und $\xi \in T_p^\vee M \setminus \{0\}$ invertierbar ist.

Beispiel 1.19.

(i) Die Operatoren $d + \delta$ und Δ sind elliptisch.

(ii) Ebenso ist der Operator Δ^E elliptisch.

2 Sobolevräume

Sei jetzt wieder (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Vektorbündeln E und F zusammen mit hermiteschen Metriken h^E und h^F. Zusätzlich seien unitäre Zusammenhänge ∇^E und ∇^F gegeben. Außerdem sei ab jetzt M geschlossen.

Definition 2.1. Seien s_1 und s_2 glatte Schnitte von E. Wir setzen

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{L^2} = \int_M h^E(s_1, s_2)\, \mathrm{dvol}^g$$

und

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{H^k} = \sum_{i=0}^{k} \int_M \left\langle \nabla^i s_1, \nabla^i s_2 \right\rangle \mathrm{dvol}^g .$$

Hier ist ∇^k die Komposition

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^\vee M \otimes E) \xrightarrow{\nabla^{T^\vee M \otimes E}} \ldots \xrightarrow{\nabla^{T^\vee M^{\otimes(k-1)} \otimes E}} \Gamma(T^\vee M^{\otimes k} \otimes E).$$

Bemerkung 2.2.
(i) Natürlich ist $\langle \_, \_ \rangle_{H^0} = \langle \_, \_ \rangle_{L^2}$.
(ii) Der Vektorraum $\Gamma(E)$ zusammen mit $\langle \_, \_ \rangle_{H^k}$ ist ein Prähilbertraum für $k \geqslant 0$.

Definition 2.3. Wir schreiben $H^k(E)$ für die Vervollständigung von $\Gamma(E)$ in der H^k–Norm. Der Raum $H^k(E)$ heißt *Sobolevraum* der Ordnung k.

Lemma 2.4. *Die Äquivalenzklasse der Norm $\|\_\|_{H^k}$ hängt nicht von g, h^E oder ∇^E ab.*

Beweis. Sei g' eine weitere Metrik auf M und h' eine weitere hermitesche Metrik auf E. Da M kompakt ist, gibt es Konstanten $\mu, \lambda > 0$, so dass $\lambda^{-2} g'_p(v, v) \leqslant g_p(v, v) \leqslant \lambda^2 g'_p(v, v)$ für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$ und analog $\mu^{-2} h'_p(w, w) \leqslant h_p(w, w) \leqslant \mu^2 h'_p(w, w)$ für alle $p \in M$ und $w \in E_p$. Es folgt, dass

$$C^{-1} \|s\|_{L^2(g',h')} \leqslant \|s\|_{L^2(g,h)} \leqslant C \|s\|_{L^2(g',h')}$$

für alle $s \in \Gamma(E)$ und $C = \mu \lambda^{n/2}$.

Für jeden weiteren hermiteschen Zusammenhang ∇' auf E ist $\xi = \nabla' - \nabla \in \Gamma(T^\vee M \otimes \mathrm{End}(E))$. Es folgt

$$|\nabla' s|(p) \leqslant |\nabla s|(p) + |\xi s|(p) \leqslant |\nabla s|(p) + |\xi|(p)|s|(p).$$

Also haben wir

$$\frac{1}{2} \int_M |\nabla' s|^2 \,\mathrm{dvol}^g \leqslant \int_M |\nabla^E s|^2 \,\mathrm{dvol}^g + \sup_{p \in M} (|\xi|^2(p)) \int_M |s|^2 \,\mathrm{dvol}^g = \|\nabla^E s\|^2_{L^2} + \|\xi\|^2_{C^0} \|s\|^2_{H^1(\nabla)}.$$

Insgesamt gilt damit $\|s\|^2_{H^1(\nabla')} \leqslant 2(1 + \|\xi\|^2_{C^0}) \|s\|^2_{H^1(\nabla)}$. Analog folgt das Lemma für höhere k. □

Man hat auf natürliche Weise stetige Inklusionen $H^{k+\ell} \hookrightarrow H^\ell(E)$. Wir zeigen nun, dass $\mathrm{PDO}(E, F)$ in gewissem Sinne von kovarianten Ableitungen erzeugt wird. Betrachte $\nabla^k \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^\vee M^{\otimes k} \otimes E)$; das ist ein partieller Differentialoperator der Ordnung k von E nach $T^\vee M^{\otimes k} \otimes E$ und es gilt

$$\sigma_p(\nabla^k)(\xi) = \sigma_p(\nabla^{T^\vee M^{\otimes(k-1)} \otimes E})(\xi) \cdots \sigma_p(\nabla^E)(\xi) = \xi^{\otimes k} \otimes \_ \colon E_p \longrightarrow T_p^\vee M^{\otimes k} \otimes E_p.$$

Betrachte weiterhin die Symmetrisierung $\mathrm{Sym}^k\colon T^\vee M^{\otimes k} \longrightarrow \mathrm{Sym}^k T^\vee M$ mit

$$\mathrm{Sym}^k(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \xi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\tau(k)} = \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_k.$$

Setze $P^k = (\mathrm{Sym}^k \otimes \mathrm{id}^E) \circ \nabla^k\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^k T^\vee M \otimes E)$. Dann ist

$$\sigma_p(P^k)\xi = (\mathrm{Sym}^k \otimes \mathrm{id}^E) \circ \sigma_p(\nabla^k)\xi = \xi \odot \cdots \odot \xi \otimes \_\colon E_p \longrightarrow \mathrm{Sym}^k T_p^\vee M \otimes E_p.$$

Mit anderen Worten haben wir

$$\sigma(P^k) = \mathrm{id} \in \Gamma(\mathrm{End}(\mathrm{Sym}^k T^\vee M \otimes E)) = \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^k T^\vee M, \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Sym}^k T^\vee M \otimes E))).$$

Ist allgemeiner $\sigma \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^k T^\vee M \otimes E, F))$, so existiert ein partieller Differentialoperator P^σ von E nach F der Ordnung k mit $\sigma(P^\sigma) = \sigma$, nämlich $P^\sigma = \sigma \circ P^k$.

Sei $L \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ beliebig und $\sigma = \sigma(L)$. Dann ist $\sigma(L) = \sigma(P^\sigma)$, also $L - P^\sigma \in \mathrm{PDO}^{(k-1)}(E, F)$. Per Induktion erhält man nun:

Lemma 2.5. *Jeder Differentialoperator* $L \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ *ist von der Form*

$$L = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i \circ P^i$$

für gewisse $\sigma_i \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^i T^\vee M \otimes E, F))$. *Anders ausgedrückt ist*

$$L = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\sigma}_i \circ \nabla^i$$

für gewisse $\widetilde{\sigma}_i \in \Gamma(\mathrm{Hom}(T^\vee M^{\otimes i} \otimes E, F))$.

Propositio 2.6. *Ist* $L \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$*, so definiert* L *einen stetigen Operator* $L\colon H^{k+\ell}(E) \longrightarrow H^\ell(F)$ *für* $\ell \geqslant 0$.

Beweis. Da $\Gamma(E) \subset H^{k+\ell}(E)$ dicht liegt, reicht es $\|Ls\|_{H^k} \leqslant C\|s\|_{H^{k+\ell}}$ für eine Konstante C und $s \in \Gamma(E)$ zu überprüfen. Für jedes $j \leqslant \ell$ und $i \leqslant k$ liefert die Produktregel

$$\|\nabla^j(\widetilde{\sigma}_i \nabla^i s)\|_{L^2} \leqslant \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \|\mathrm{id}_{T^\vee M^{\otimes m}} \otimes \nabla^{j-m}\widetilde{\sigma}_i\|_{C^0} \|\nabla^m \nabla^i s\|_{L^2},$$

also gibt es Konstanten C_j mit $\|\nabla^j(\widetilde{\sigma}_i \nabla^i s)\|_{L^2} \leqslant C_j\|s\|_{H^{i+j}} \leqslant C_j\|s\|_{H^{k+\ell}}$. Es folgt, dass es eine Konstante C mit $\|\widetilde{\sigma}_i \nabla^i s\|_{H^\ell} \leqslant C\|s\|_{H^{k+\ell}}$ gibt, d. h. $\widetilde{\sigma}_i \nabla^i\colon H^{k+\ell}(E) \longrightarrow H^\ell(F)$ ist stetig. Die Aussage folgt. □

3 Lokale Theorie

In diesem Abschnitt betrachten wir den lokalen Fall $M = \mathbb{R}^n$ mit trivialen Bündeln $E = M \times \mathbb{C}^r$ und $F = M \times \mathbb{C}^s$. Hier ist jeder Differentialoperator von der Form $L = \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha(x) D^\alpha$ für gewisse $A_\alpha \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ und $D^\alpha = i^{-|\alpha|} \partial^\alpha$. Das Symbol von L ist gegeben durch $\sigma_x(L)\xi = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x)\xi^\alpha$. Das wichtigste Hilfsmittel zum Studium solcher Operatoren ist die Fouriertransformation. Wir schreiben

$$\mathcal{S} = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r) : \text{Für alle } \alpha, k \text{ existiert ein } C_{\alpha,k} > 0 \text{ mit } |D^\alpha u(x)| \leqslant C_{\alpha,k}(1 + |x|)^{-k}\}$$

für den Raum der *Schwartzfunktionen* auf $\mathbb{R}^n$. Auf diesem Raum ist die Fouriertransformation $\widehat{\_} \colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ definiert durch

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:
- $u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \widehat{u}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \, d\xi$.
- $\langle u, v\rangle_{L^2} = \langle \widehat{u}, \widehat{v}\rangle_{L^2}$.
- $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)$ und $\widehat{x^\alpha u} = D^\alpha \widehat{u}(\xi)$.

Definition 3.1. Für $s \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{S}$ setze

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Wir schreiben wieder $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ für die Vervollständigung von $\mathcal{S}$ bezüglich $\|\_\|_{H^s}$.

Bemerkung 3.2.
(i) Es gilt $C_0^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^2$. Es folgt, dass $\mathcal{S}$ dicht in L^2 liegt und $\|\_\|_{H^0} = \|\_\|_{L^2}$.
(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1(1 + |\xi|)^{2k} \leqslant 1 + |\xi|^2 + \cdots + |\xi|^{2k} \leqslant c_2(1 + |\xi|)^{2k}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt

$$c_1\|u\|_{H^k}^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \cdots + |\xi|^{2k}) |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant c_2\|u\|_{H^k}^2$$

für alle $u \in \mathcal{S}$. In der Tat ist

$$(1 + |\xi|)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |\xi|^i \sim 1 + |\xi| + \cdots + |\xi|^k$$

und daher $(1 + |\xi|)^{2k} \sim 1 + |\xi|^2 + \cdots + |\xi|^{2k}$. Andererseits gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

und

$$\sum_{|\alpha|=\ell} \xi_1^{2\alpha_1} \cdots \xi_n^{2\alpha_n} \sim |\xi|^{2\ell} = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^\ell.$$

Also ist $\|u\|_{H^k} \sim \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2$ für ganzzahlige k. Insbesondere ist $D^\alpha \colon H^{k+\ell} \longrightarrow H^\ell$ stetig für $k = |\alpha|$; es ist sogar allgemeiner $D^\alpha \colon H^{k+s} \longrightarrow H^s$ stetig für alle $s \in \mathbb{R}$.

(iii) Die H^s sind Hilberträume bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} \langle \widehat{u}(\xi), \widehat{v}(\xi)\rangle \, d\xi$$

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte die Menge $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ der k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^r$ mit der „Norm“

$$\|u\|_{C^k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u(x)| \leqslant \infty.$$

Der Abschluss von $\mathcal{S}$ bezüglich $\|\_\|_{C^k}$ ist ein Banachraum und echt enthalten in $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 3.3 (Sobolev). *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $s > k + n/2$. Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, so hat u einen k–fach stetig differenzierbaren Repräsentanten und für diesen gilt $\|u\|_{C^k} \leqslant C\|u\|_{H^s}$ für eine Konstante C, die nicht von u abhängt.*

Beweis. Sei zuerst $k = 0$ und $s > n/2$. Für $u \in \mathcal{S}$ gilt

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{u}(\xi) \, d\xi$$

und

$$|u(x)|^2 \leqslant (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-s}(1+|\xi|)^s |\widehat{u}(\xi)| \, d\xi \right)^2 \leqslant (2\pi)^{-n} \|u\|^2_{H^s} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-2s} \, d\xi.$$

Wegen $s > n/2$ ist hier das letzte Integral endlich und wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}$ in H^s ist der Fall $k = 0$ bewiesen.

Wiederholt man obiges Argument für $D^\alpha u$ mit $|\alpha| < s - n/2$, erhält man

$$|D^\alpha u(x)|^2 \leqslant (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2(|\alpha|-s)} \, d\xi \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2(s-|\alpha|)}) \xi^{2|\alpha|} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Daraus folgt die Behauptung für $k > 0$. □

Bemerkung 3.4. Für $s' \leqslant s$ gilt $(1+|\xi|)^{2s'} \leqslant (1+|\xi|)^{2s}$, d. h. $\|u\|_{H^{s'}} \leqslant \|u\|_{H^s}$ für alle $u \in \mathcal{S}$. Mit anderen Worten, die Inklusion $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Für $s' < s$ und Träger in einem festen Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ist die Inklusion sogar kompakt:

Lemma 3.5 (Rellich). *Sei $\{u_j\}$ eine Folge von Funktionen in C^∞ mit Träger in einem festen Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\|u_j\|_{H^s} \leqslant C$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann existiert für alle $s' < s$ eine Teilfolge $\{u_{j_k}\}$, die bezüglich $\|\_\|_{H^{s'}}$ konvergiert.*

Beweis. Ist $u = (u^1, \ldots, u^r)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^r$, so ist $\|u\|^2_{H^s} = \sum_i \|u^i\|^2_{H^s}$; d. h. wir können uns auf den Fall $u\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränken. Für $u, v \in \mathcal{S}$ sei

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) \, dy$$

die *Faltung* von u und v. Für die Faltung gilt $\widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2}\widehat{u} \cdot \widehat{v}$ und $\widehat{uv} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{u} * \widehat{v}$.

Wähle zuerst $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi|_K = 1$. Dann ist $\varphi \cdot u = u$, also $\widehat{u} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{\varphi} * \widehat{u}$, d. h.

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi - \eta)\widehat{u}(\eta) \, d\eta.$$

Differenzieren liefert

$$D_\xi^\alpha \widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (D_\xi^\alpha \widehat{\varphi})(\xi - \eta) \cdot \widehat{u}(\eta)\, d\eta$$

und es folgt

$$|D_\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n} (1+|\eta|)^{-2s} |D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\, d\eta \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|)^{2s} |\widehat{u}(\eta)|^2\, d\eta = K_\alpha(\xi) \|u\|_{H^s}^2 .$$

Das erste Integral $K_\alpha(\xi)$ in diesem Ausdruck ist endlich und hängt stetig von ξ ab.

Insbesondere folgt, dass die Folge $\widehat{u}_j(\xi)$ lokal in ξ gleichmäßig beschränkt und – für ξ in einem Kompaktum $K' \subset \mathbb{R}^n$ – gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Der Satz von Arzelà–Ascoli besagt dann, dass $\widehat{u}_j$ auf K' eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Für $r > 0$ schreibe

$$\|u_j - u_i\|_{H^{s'}}^2 = \int_{|\xi|\geqslant r} |\widehat{u}_j(\xi) - \widehat{u}_i(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s'}\, d\xi + \int_{|\xi|\leqslant r} |\widehat{u}_j(\xi) - \widehat{u}_i(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s'}\, d\xi.$$

Für $|\xi| \geqslant r$ haben wir

$$(1+|\xi|)^{2s'} = (1+|\xi|)^{2s} (1+|\xi|)^{-2(s-s')} \leqslant (1+|\xi|)^{2s} (1+r)^{-2(s-s')}.$$

Daraus folgt, dass ein $r > 0$ existiert mit

$$\int_{|\xi|\geqslant r} |\widehat{u}_j(\xi) - \widehat{u}_i(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s'}\, d\xi < \varepsilon/2.$$

Für $|\xi| \leqslant r$ sei $M = \sup_{|\xi|\leqslant r} (1+|\xi|)^{2s'} < \infty$. Damit ist

$$\int_{|\xi|\leqslant r} |\widehat{u}_j(\xi) - \widehat{u}_i(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s'}\, d\xi \leqslant M \operatorname{vol}(|\xi| \leqslant r) \sup_{|\xi|\leqslant r} |\widehat{u}_j(\xi) - \widehat{u}_i(\xi)|^2.$$

Der erste Teil des Beweises liefert eine auf $\{|\xi| \leqslant r\}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{\widehat{u}_{j_k}\}$ von $\{\widehat{u}_j\}$. Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$M \operatorname{vol}(|\xi| \leqslant r) \sup_{|\xi|\leqslant r} |\widehat{u}_{j_\ell}(\xi) - \widehat{u}_{j_m}(\xi)|^2 \leqslant \varepsilon/2$$

für alle $\ell, m \geqslant k$. Insgesamt folgt $\|u_{j_\ell} - u_{j_m}\|_{H^{s'}}^2 < \varepsilon$ für alle $\ell, m \geqslant k$. □

Bemerkung 3.6. Auf die Annahme, dass die u_j Träger in einem festen Kompaktum haben, kann man nicht verzichten.

Propositio 3.7. *Das L^2–Skalarprodukt $\langle \_, \_ \rangle_{L^2} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ induziert kanonisch eine perfekte Paarung $\langle \_, \_ \rangle : H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$, d.h. die Abbildung $H^{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)^*, v \longmapsto \langle \_, v \rangle$ ist ein isometrischer antilinearer Isomorphismus.*

Beweis. Für $u, v \in \mathcal{S}$ gilt

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \widehat{u}(\xi)(1+|\xi|)^s, \widehat{v}(\xi)(1+|\xi|)^{-s} \right\rangle d\xi,$$

und wegen Cauchy–Schwarz

$$|\langle u,v\rangle_{L^2}| \leqslant \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s}}.$$

Es folgt, dass $\langle \_,\_\rangle$ eine stetige Fortsetzung $\langle \_,\_\rangle : H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ zulässt. Weiterhin gilt

$$\sup_{\|u\|_{H^s}=1} |\langle u,v\rangle| \leqslant \|v\|_{H^{-s}}$$

für alle $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Umgekehrt gibt es immer ein $u \in H^s$ mit $|\langle u,v\rangle| = \|v\|_{H^{-s}}$: Sei zunächst $v \in \mathcal{S}$ und setze $\widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi)(1+|\xi|)^{-2s}$. Dann gilt $\|u\|_{H^s} = \|v\|_{H^{-s}}$ und

$$\langle u,v\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{-2s}\,d\xi = \|v\|^2_{H^{-s}}.$$

Es folgt, dass $\langle u/\|u\|, v\rangle = \|v\|_{H^{-s}}$.

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass $H^{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)^*$ eine Isometrie ist. Zur Surjektivität: Es ist $H^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R})^*$ ein abgeschlossener Unterraum. Angenommen, die Inklusion wäre echt. Dann existiert ein $0 \neq u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle u,v\rangle = 0$ für alle $v \in H^{-s}$. Das ist ein Widerspruch, denn $\langle \_,\_\rangle$ ist nicht ausgeartet. □

Korollar 3.8. *Seien* $T, T^*\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *linear mit* $\langle Tu,v\rangle_{L^2} = \langle u, T^*v\rangle_{L^2}$ *für alle* $u,v \in \mathcal{S}$. *Gilt dann* $\|Tu\|_{H^s} \leqslant C\|u\|_{H^s}$ *für alle* $u \in \mathcal{S}$, *so gilt auch* $\|T^*v\|_{H^{-s}} \leqslant C\|v\|_{H^{-s}}$ *für alle* $v \in \mathcal{S}$.

Beweis. Es ist

$$\|T^*v\|_{H^{-s}} = \sup_{\|u\|_{H^s}=1} |\langle u, T^*v\rangle| = \sup_{\|u\|_{H^s}=1} |\langle Tu, v\rangle| \leqslant C\|v\|_{H^{-s}}.$$ □

Satz 3.9 (Calderon). *Sei* $T\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *mit* $\|Tu\|_{H^s} \leqslant C\|u\|_{H^s}$ *für* $s = s_1$ *und* $s = s_2 > s_1$. *Dann gilt diese Ungleichung auch für alle* $s \in [s_1, s_2]$.

Propositio 3.10. *Sei* $L = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha(x)D^\alpha$ *ein linearer Differentialoperator auf* $\mathbb{R}^n$, *der eine Abschätzung* $|D^\beta A_\alpha(x)| \leqslant C_{\alpha\beta}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *erfüllt. Dann ist* $L\colon H^{s+k}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt für alle* $s \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $L = A(x)$ und $|D^\beta A(x)| \leqslant C_\beta$ gilt

$$\|D^\beta(A(x)u(x))\|^2_{L^2} \leqslant \widetilde{C}_\beta \sum_{|\alpha|\leqslant \ell} \|D^\alpha u\|^2_{L^2} \leqslant \widetilde{C}_\beta \|u\|^2_{H^\ell}.$$

Insbesondere ist $\|Au\|_{H^\ell} \leqslant C\|u\|_{H^\ell}$ für $\ell \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $(L^*v)(x) = A(x)^*v(x)$ und deshalb ist auch $\|L^*v\|_{H^{-\ell}} \leqslant C_\ell\|v\|_{H^{-\ell}}$. Daraus folgt wegen Korollar 3.8 schon $\|Lu\|_{H^\ell} \leqslant C_\ell\|u\|_{H^\ell}$. Satz 3.9 liefert $\|Lu\|_{H^s} \leqslant C_s\|u\|_{H^s}$ für $s \in \mathbb{R}$.

Für $L = D^\alpha$ ist $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)$. Daraus folgt

$$\|D^\alpha u\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2|\xi^\alpha|^2(1+|\xi|)^{2s}\,d\xi \leqslant C\|u\|^2_{H^{s+|\alpha|}}.$$ □

4 Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathbb{R}^n$

Sei $P = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha(x)D^\alpha$ und $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha(x)\xi^\alpha$ das *volle Symbol* von P. Fourierinversion liefert dann

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha(x)(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi.$$

Hier ist $Pu \in \mathcal{S}$, falls zum Beispiel $|D^\beta A_\alpha(x)| \leqslant C_\beta$.

Definition 4.1. Eine Funktion $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ heißt *Symbol* der Ordnung $d \in \mathbb{R}$, falls für alle Multiindizes α und β Konstanten $C_{\alpha\beta} > 0$ existieren, so dass

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{d-|\beta|}$$

für alle $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben Symb^d für den Raum der Symbole der Ordnung d.

Propositio 4.2. *Sei* $p(x,\xi) \in \operatorname{Symb}^d$.

(i) *Durch*

$$(P(x,D)u)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

wird ein linearer Operator $P(x,D)\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *definiert.*

(ii) *Wenn das Symbol* $p(x,\xi)$ *kompakten Träger in* x *hat, dann definiert* $p(x,\xi)$ *einen beschränkten Operator* $P = P(x,D)\colon H^{d+s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$.

Beweis.

(i) Sei $v = Pu$. Mit partieller Integration sieht man

$$x^\alpha v(x) = (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}D^\alpha_\xi(p(x,\xi)\hat{u}(\xi))\,d\xi$$

und es ist $|D^\alpha(p(x,\xi)\hat{u}(\xi))| \leqslant C_{\alpha k}(1+|\xi|)^{d-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|x^\alpha v(x)| \leqslant C_\alpha$ für ein festes, hinreichend großes k. Ein analoges Argument liefert die gewünschte Schranke an $D^\beta_x v(x)$.

(ii) Hat p kompakten Träger in x, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\xi')^\alpha e^{i\langle x,\xi'\rangle}p(x,\xi)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha_x(e^{i\langle x,\xi'\rangle})p(x,\xi)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi'\rangle}D^\alpha_x p(x,\xi)\,dx$$

für alle Multindizes α; das letzte Integral ist betragsmäßig beschränkt durch $C_\alpha(1+|\xi|)^d$, d. h. man bekommt eine Abschätzung

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi'\rangle}p(x,\xi)\,dx\right| \leqslant C_k(1+|\xi'|)^{-k}(1+|\xi|)^d$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei

$$\psi(\xi,\eta) = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi-\eta\rangle}p(x,\xi)\,dx\right|(1+|\xi|)^{-s-d}(1+|\eta|)^s$$

für $s \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\psi(\xi,\eta) \leqslant C_k(1+|\xi|)^{-s}(1+|\eta|)^s(1+|\xi-\eta|)^{-k} \leqslant C_k(1+|\xi-\eta|)^{|s|-k}$$

nach der *Peetreungleichung* $(1+|x+y|)^s \leqslant (1+|y|)^s(1+|x|)^{|s|}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\eta,\xi)\, d\xi < C \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\eta,\xi)\, d\eta < C$$

für ein festes s. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\langle Pu, v\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \widehat{Pu}(\eta), \widehat{v}(\eta) \right\rangle d\eta \right| = \\
&= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi-\eta\rangle} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi\, dx, \widehat{v}(\eta) \right\rangle d\eta \right| \leqslant \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi-\eta\rangle} p(x,\xi)\, dx\, \widehat{u}(\xi)\, d\xi \right| |\widehat{v}(\eta)|\, d\eta \leqslant \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi,\eta)(1+|\xi|)^{s+d}(1+|\eta|)^{-s} |\widehat{u}(\xi)||\widehat{v}(\eta)|\, d\xi\, d\eta \leqslant \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi,\eta)|\widehat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2(s+d)}\, d\xi\, d\eta \right)^{1/2} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi,\eta)|\widehat{v}(\eta)|^2 (1+|\eta|)^{-2s}\, d\xi\, d\eta \right)^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2(s+d)}\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}(\eta)|^2 (1+|\eta|)^{-2s}\, d\eta \right)^{1/2} = \\
&= (2\pi)^{-n} \|u\|_{H^{s+d}} \|v\|_{H^{-s}}.
\end{aligned}$$

für $u, v \in \mathcal{S}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 4.3. Für $p(x,\xi) \in \mathrm{Symb}^d$ mit kompaktem Träger in x heißt $P = P(x, D)$ wie in Propositio 4.2 *Pseudodifferentialoperator* der Ordnung d mit *vollem Symbol* $p(x,\xi)$. Wir schreiben $\Psi\mathrm{DO}^d$ für die Klasse der Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung d.

Ein Symbol $p(x,\xi) \in \mathrm{Symb}^{-d}$ für $d > 0$ heißt d–*glättend* und $p(x,\xi) \in \bigcap_{d\in\mathbb{R}} \mathrm{Symb}^{-d} = \mathrm{Symb}^{-\infty}$ heißt ∞–*glättend*. Entsprechend heißt $P \in \Psi\mathrm{DO}^{-d}$ d–*glättend* und $P \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$ ∞–*glättend* oder *Glättungsoperator*.

Wir nennen Pseudodifferentialoperatoren P und Q äquivalent – in Zeichen $P \sim Q$ – wenn ihre Differenz $P - Q$ ein Glättungsoperator ist.

Definition 4.4. Sei P ein Pseudodifferentialoperator mit Symbol p. Wir sagen, p hat eine *aymptotische Entwicklung* in eine formale Reihe

$$p \sim \sum_{j=1}^{\infty} p_j$$

für gewisse $p_j \in \mathrm{Symb}^{d_j}$, falls für jedes $d \in \mathbb{N}$ ein $k > 0$ existiert, so dass die Differenz $p - \sum_{j=1}^{k} p_j$ glättend von Ordnung d ist:

$$p - \sum_{j=1}^{k} p_j \in \mathrm{Symb}^{-d}.$$

Propositio 4.5. *Jede formale Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} p_j$ *mit* $p_j \in \mathrm{Symb}^{d_j}$ *und* $d_j \to -\infty$ *ist eine aymptotische Entwicklung eines Pseudodifferentialoperators* P. *Der Operator* P *ist dadurch bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\{d_j\}$ streng monoton fällt. Wähle eine glatte Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow [0,1]$ mit $\varphi|_{[0,1]} = 0$ und $\varphi|_{[2,\infty)} = 1$. Wir konstruieren eine monotone Folge von Radien r_j mit $r_j \to \infty$, so dass

$$p(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(|\xi|/r_j) \cdot p_j(x,\xi)$$

wohldefiniert ist. Sei $\widetilde{\varphi}(\xi) = \varphi(|\xi|)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $M_j = (2^j+1)\|\widetilde{\varphi}\|_{C^j}$. Wegen $p_j \in \mathrm{Symb}^{d_j}$ gibt es Konstanten $C_{\alpha\beta}(j)$ mit

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_j(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(j)(1+|\xi|)^{d_j-|\beta|}.$$

Setze $C(j) = \max\{C_{\alpha\beta}(j)\colon |\alpha|,|\beta| \leqslant j\}$ und sei $r_j > M_j 2^j C(j)$. Dann gilt für $|\alpha|,|\beta| \leqslant j$ und $|\xi| \leqslant r_j$ die Abschätzung

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_j(x,\xi)| \leqslant C(j)(1+|\xi|)^{-1}(1+|\xi|)^{d_j+1-|\beta|} \leqslant \frac{C(j)}{r_j}(1+|\xi|)^{d_j+1-|\beta|} \leqslant \frac{1}{M_j 2^j}(1+|\xi|)^{d_j+1-|\beta|}$$

Setze jetzt $\widetilde{\varphi}_j(\xi) = \varphi(|\xi|/r_j)$. Dann ist $\|\widetilde{\varphi}_j\|_{C^j} \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|_{C^j}$ (angenommen $r_j > 1$) und es gilt

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta(\widetilde{\varphi}_j p_j)(x,\xi)| \leqslant (2^j+1)\|\widetilde{\varphi}\|_{C^j}|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_j(x,\xi)| \leqslant \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{d_j+1-|\beta|} \leqslant \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{d_1+1-|\beta|}$$

für alle $|\alpha|,|\beta| \leqslant j$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Summation liefert damit $p(x,\xi) \in \mathrm{Symb}^{d_1+1}$. Außerdem folgt

$$p - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\varphi}_j p_j = \sum_{j=k+1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_j p_j \in \mathrm{Symb}^{d_{k+1}+1}.$$

Es gilt $\widetilde{\varphi}_j p_j = p_j$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{2r_j}(0)$, d. h. auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{2r_k}(0)$ gilt

$$p - \sum_{j=1}^{k} p_j = p - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\varphi}_j p_j$$

und deshalb $p - \sum_{j=1}^k p_j \in \mathrm{Symb}^{d_{k+1}+1}$.

Gilt $p \sim q \sim \sum_j p_j$ mit $p_j \in \mathrm{Symb}^{d_j}$ und $d_j \to -\infty$, so ist

$$p - q = \left(p - \sum_{j=1}^{k} p_j\right) - \left(q - \sum_{j=1}^{k} p_j\right) \in \mathrm{Symb}^{-d}$$

für ein hinreichend großes k. Es folgt, dass sich p und q nur um ein ∞−glättendes Symbol unterscheiden. □

Propositio 4.6 (Workhorse Theorem). *Sei* $d \in \mathbb{R}$ *und* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ *mit kompaktem Träger in* x *und* y*. Wir nehmen außerdem an, dass Konstanten* $C_{\alpha\beta\gamma}$ *mit*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x,y,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(1+|\xi|)^{d-|\gamma|}$$

existieren. Dann ist der Operator $K\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *mit*

$$(Ku)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,y,\xi)u(y)\,dy\,d\xi$$

ein Pseudodifferentialoperator von Ordnung d*, dessen Symbol* k *eine asymptotische Entwicklung*

$$k(x,\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_y^\alpha a)(x,x,\xi)$$

hat.

Beweis. Es bezeiche $\widehat{a}$ die Fouriertransformation von a bezüglich y. Dann gilt[1]

$$\begin{aligned}(Ku)(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{a}(x,\xi-\eta,\xi) \widehat{u}(\eta)\, d\eta\, d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} e^{i\langle x,\xi-\eta\rangle} \widehat{a}(x,\xi-\eta,\xi)\, d\xi\, \widehat{u}(\eta)\, d\eta = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle} k(x,\eta) \widehat{u}(\eta)\, d\eta.\end{aligned}$$

wobei $k(x,\eta)$ das innere Integral in der zweiten Zeile bezeichne. Es ist zu zeigen, dass $k(x,\eta) \in \mathrm{Symb}^d$ und dass $k(x,\eta)$ die angegebene asymptotische Entwicklung hat. Dafür zeigen wir zunächst, dass Konstanten $C_{\alpha\beta k} > 0$ existieren, so dass

$$|D_x^\alpha D_\eta^\beta \widehat{a}(x,\xi,\xi+\eta)| \leqslant C_{\alpha\beta k}(1+|\xi+\eta|)^{d-|\beta|}(1+|\xi|)^{-k}.$$

Für $|\gamma| \leqslant k$ ist in der Tat

$$\begin{aligned}|\xi^\gamma D_x^\alpha D_\eta^\beta \widehat{a}(x,\xi,\xi+\eta)| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle y,\xi\rangle} \xi^\gamma (D_x^\alpha D_\xi^\beta a)(x,y,\xi+\eta)\, dy \right| \leqslant \\ &\leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |(D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a)(x,y,\xi+\eta)|\, dy.\end{aligned}$$

Hat nun a Träger in $K \times L \times \mathbb{R}^n$ mit K und L kompakt, so bekommen wir

$$\cdots \leqslant (2\pi)^{-n/2} \operatorname{vol}(L) C'_{\alpha\gamma\beta} (1+|\xi+\eta|)^{d-|\beta|}$$

wegen unserer Annahme über a. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha D_\eta^\beta k(x,\eta)| &\leqslant (2\pi)^{-n/2} \sum_{|\alpha|=|\alpha'|+|\alpha''|} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^{\alpha'} D_x^{\alpha''} D_\eta^\beta \widehat{a}(x,\xi,\xi+\eta)|\, d\xi \leqslant \\ &\leqslant C' \int (1+|\xi+\eta|)^{d-|\beta|}(1+|\xi|)^{-k}\, d\xi \leqslant C(1+|\eta|)^{d-|\beta|}.\end{aligned}$$

Eine Taylorentwicklung in der dritten Variablen von $\widehat{a}$ liefert (wobei $D_\xi^\alpha \widehat{a}$ die Ableitung von $\widehat{a}$ nach der dritten Variable bezeichnet)

$$\widehat{a}(x,\xi,\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|\leqslant \ell} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha \widehat{a})(x,\xi,\eta)\xi^\alpha + R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)$$

[1] Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist gerechtfertigt, denn

$$|\widehat{a}(x,\xi-\eta,\xi)\widehat{u}(\eta)| \leqslant C_{k\ell}(1+|\xi|)^d(1+|\xi-\eta|)^{-k}(1+|\eta|)^{-\ell} \leqslant C_{k\ell}(1+|\xi|)^{d-k}(1+|\eta|)^{k-\ell}$$

und Letzteres ist integrabel für $k, \ell \gg 0$.

mit dem Restglied

$$R_\ell(x,\xi,\xi+\eta) = (\ell+1)i^{\ell+1}\sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{1}{\mu!}\int_0^1 (D_\xi^\mu\widehat{a})(x,\xi,t\xi+\eta)\xi^\mu(1-t)^\ell\,dt.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
k(x,\eta) &= \sum_{|\alpha|\leqslant\ell}(2\pi)^{-n/2}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}(D_\xi^\alpha\widehat{a})(x,\xi,\eta)\xi^\alpha\,d\xi + r_\ell(x,\eta) = \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant\ell}(2\pi)^{-n/2}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\widehat{D_y^\alpha D_\xi^\alpha}a(x,\xi,\eta)\,d\xi + r_\ell(x,\eta) = \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant\ell}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_y^\alpha D_\xi^\alpha a)(x,x,\eta) + r_\ell(x,\eta).
\end{aligned}$$

mit $r_\ell(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi$. Es genügt also, dass $r_\ell(x,\eta)\in \mathrm{Symb}^{d-(\ell+1)}$:

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha D_\eta^\beta R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)| &= (\ell+1)\left|\sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{1}{\mu!}\int_0^1(D_x^\alpha D_\xi^{\beta+\mu}\widehat{a})(x,\xi,t\xi+\eta)\xi^\mu(1-t)^\ell\,dt\right| \leqslant \\
&\leqslant C\sum_{|\mu|=\ell+1}\int_0^1(1+|\xi|)^{-k}(1+|t\xi+\eta|)^{d-|\beta|-\ell-1}|\xi^\mu(1-t)^\ell|\,dt \leqslant \\
&\leqslant C'\int_0^1(1+|\xi|)^{-k}(1+|t\xi+\eta|)^{d-\ell-1-|\beta|}|\xi|^{\ell+1}(1-t)^\ell\,dt \leqslant \\
&\leqslant C'(1+|\xi|)^{-k+\ell+1+|d-(\ell+1)-|\beta||}(1+|\eta|)^{d-(\ell+1)-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Für $k\gg 0$ folgt daraus die gewünschte Symbolabschätzung für $r_\ell(x,\eta)$. □

Bemerkung 4.7. Verschwindet $a(x,y,\xi)$ in einer Umgebung der x–y–Diagonalen, dann ist K ein Glättungsoperator, denn $k\sim 0$.

Definition 4.8. Für $A\subset\mathbb{R}^n$ sei $A_\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^n : d(x,A)<\varepsilon\}$. Eine Operator $P\colon \mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{S}$ heißt ε*–lokal*, wenn für alle $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $\mathrm{supp}(Pu)\subset\mathrm{supp}(u)_\varepsilon$.

Lemma 4.9. *Ist* $P\in\Psi\mathrm{DO}^d$ *und* $\varepsilon>0$*, so existiert immer ein* ε*–lokaler Pseudodifferentialoperator* P_ε *mit* $P_\varepsilon\sim P$.

Beweis. Sei $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x,y)=1$ für $|x-y|<\varepsilon/2$ und $\psi(x,y)=0$ für $|x-y|\geqslant\varepsilon$. Sei

$$P_\varepsilon u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\psi(x,y)p(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi,$$

mit $p=\mathrm{symb}(P)$. Diese Formel definiert nach Propositio 4.6 einen Pseudodifferentialoperator der Ordnung d und $P-P_\varepsilon\in\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$, da $p(x,\xi)-\psi(x,y)p(x,\xi)$ in einer Umgebung der x–y–Diagonale verschwindet. Außerdem ist P_ε ε–lokal, denn für $d(x,\mathrm{supp}(u))\geqslant\varepsilon$ verschwindet immer entweder $\psi(x,y)$ oder $u(y)$. □

Lemma 4.10. *Sei* $\chi=(\chi_1,\chi_2)$ *mit* $\chi_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $P\in\Psi\mathrm{DO}^d$*. Dann ist der lineare Operator* P^χ *mit* $P^\chi u = \chi_1 P(\chi_2 u)$ *ebenfalls ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung* d.

Beweis. Sei $p(x,\xi)$ das Symbol von P und setze $a(x,y,\xi) = \chi_1(x)\chi_2(y)p(x,\xi)$. Wegen Propositio 4.6 definiert a einen Pseudodifferentialoperator K der Ordnung d mit

$$\begin{aligned} Ku(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,y,\xi)u(y)\,d\xi = \\ &= \chi_1(x)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} p(x,\xi)\chi_2(y)u(y)\,dy d\xi = P^{\chi}u(x). \end{aligned}$$

□

Propositio 4.11 (Pseudolokalität). *Sei* $P \in \Psi DO^d$ *und* $u \in H^s$ *für ein* $s \in \mathbb{R}$. *Dann gilt für jede offene Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$*: Ist* $u|_U \in C^\infty$*, so auch* $Pu|_U \in C^\infty$.

Beweis. Sei $x \in U$. Wähle ein Paar $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ glatter Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger in U, so dass $\chi_1 = 1$ auf einer Umgebung von x und $x_2 = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp}\chi_1$. Dann ist nach Voraussetzung $\chi_2 u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ und deshalb $P(\chi_2 u) \in \mathcal{S}$. Also ist auch $\chi_1 P(\chi_2 u) \in C_0^\infty$. Es gilt

$$\chi_1 P(u) - \chi_1 P(\chi_2 u) = \chi_1(P(1-\chi_2)u) = \chi_1(P_\varepsilon(1-\chi_2)u) + \chi_1((P-P_\varepsilon)(1-\chi_2)u)$$

mit einem ε–lokalen Operator P_ε und $P - P_\varepsilon$ glättend wie in Lemma 4.9. Wählt man ε so klein, dass $\operatorname{supp}\chi_1 \cap (\operatorname{supp}(1-\chi_2))_\varepsilon = \emptyset$, verschwindet der erste Summand. Da der zweite glatt ist, ist $\chi_1 P(u)$ glatt. □

Definition 4.12. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und relativ kompakt sei

$$\mathrm{Symb}^d(U) = \{p \in \mathrm{Symb}^d : p \text{ hat kompakten } x\text{–Träger in } U\}$$

und

$$\Psi DO^d(U) = \{P \in \Psi DO^d : \mathrm{symb}(P) \in \mathrm{Symb}^d(U)\}.$$

Betrachte $P \in \Psi DO^d(U)$ als linearen Operator $P\colon C_0^\infty(U) \longrightarrow C_0^\infty(U)$ oder als stetigen Operator $P\colon H_0^{s+d}(U) \longrightarrow H_0^s(U)$.

Satz 4.13 (Symbolkalkül).

(i) *Ist* $P \in \Psi DO^d(U)$ *mit Symbol* $p(x,\xi)$*, so gibt es einen formal adjungierten Operator* $P^* \in \Psi DO^d(U')$ *zu* P *auf jeder relativ kompakten, offenen Menge* U' *mit* $\overline{U} \subset U'$. *Das Symbol* $p^*(x,\xi)$ *von* P^* *hat eine asymptotische Entwicklung*

$$p^*(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_x^\alpha p(x,\xi)^*.$$

(ii) *Ist* $P \in \Psi DO^d(U)$ *mit Symbol* $p(x,\xi)$ *und* $Q \in \Psi DO^e(U)$ *mit Symbol* $q(x,\xi)$*, dann ist, solange die Komposition definiert ist,* $P \circ Q \in \Psi DO^{d+e}(U)$ *und das Symbol hat eine asymptotische Entwicklung*

$$\mathrm{symb}(P \circ Q) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p)(x,\xi) \cdot (D_x^\alpha q)(x,\xi).$$

Beweis.

(i) Sei $\psi \in C_0^\infty(U')$ mit $\psi = 1$ auf $\overline{U}$. Für $u, v \in C_0^\infty(U)$ gilt[2]

$$\begin{aligned}
\langle Pu, v\rangle_{L^2} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \langle p(x,\xi)u(y), v(x)\rangle \, dy\, d\xi\, dx = \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \langle p(x,\xi)\hat{u}(\xi), v(x)\rangle \, d\xi\, dx = \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \langle p(x,\xi)u(y), v(x)\rangle \, dy\, dx\, d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big\langle u(y), e^{i\langle y-x,\xi\rangle} p(x,\xi)^* v(x)\Big\rangle \, dx\, dy\, d\xi = \\
&= \langle u, P^* v\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

für

$$P^* v(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \psi(x) p(y,\xi)^* v(y)\, dy\, d\xi.$$

Wegen Propositio 4.6 mit $a(x,y,\xi) = \psi(x)p(y,\xi)^*$ definiert dieser Ausdruck einen Pseudodifferentialoperator $P^* \in \Psi DO^d(U')$ mit der asymptotischen Entwicklung

$$\operatorname{symb}(P^*)(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_y^\alpha a)(x,x,\xi) = \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_x^\alpha p(x,\xi)^*.$$

(ii) Zunächst gilt

$$(PQ)u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi) \widehat{Qu}(\xi)\, d\xi$$

und wegen $Q = Q^{**}$ sowie $\operatorname{supp} Qu \subset U$ ist

$$Qu(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} (q^*(y,\xi))^* u(y)\, dy\, d\xi,$$

d. h. mit $r(y,\xi) = (q^*(y,\xi))^*$ gilt

$$(PQ)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} p(x,\xi) r(y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi.$$

Propositio 4.6 mit $a(x,y,\xi) = p(x,\xi)r(y,\xi)$ liefert dann $PQ \in \Psi DO^{d+e}(U)$ (denn der x–Träger von a liegt in U) und die gewünschte asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}
\operatorname{symb}(PQ) &\sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_y^\alpha pr)(x,x,\xi) = \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D_\xi^\beta p)(x,\xi)(D_\xi^\gamma D_y^\alpha r)(x,\xi) = \\
&= \sum_\beta \frac{i^{|\beta|}}{\beta!} (D_\xi^\beta p)(x,\xi) D_x^\beta \Big(\sum_\gamma \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} D_\xi^\gamma D_y^\gamma r\Big)(x,\xi) \sim \\
&\sim \sum_\beta \frac{i^{|\beta|}}{\beta!} (D_\xi^\beta p)(x,\xi)(D_x^\beta q)(x,\xi).
\end{aligned}$$

□

[2]Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge im letzten Schritt ist gerechtfertigt, da

$$\int e^{-i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)^* v(x)\, dx = (\widehat{p(\_,\xi)^*} * \hat{v})(\xi)$$

eine Schwartzfunktion ist.

Satz 4.14 (Koordinateninvarianz). *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und relativ kompakt. Ein Diffeomorphismus* $\varphi\colon U \longrightarrow V$ *induziert eine natürliche Abbildung*

$$\varphi_*\colon \Psi DO^d(U) \longrightarrow \Psi DO^d(V), \quad P \longmapsto (\varphi^{-1})^* \circ P \circ \varphi^*.$$

Beweis. Schreibe $x = \varphi(\widetilde{x})$ und $\psi = \varphi^{-1}$. Dann gilt

$$\widetilde{x} - \widetilde{y} = \psi(x) - \psi(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(tx + (1-t)y)\,dt = \Psi(x,y)(x-y)$$

für $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \ll 1$ und

$$\Psi(x,y) = \int_0^1 D\psi(tx + (1-t)y)\,dt.$$

Da ψ ein Diffeomorphismus ist, folgt, dass Ψ auf der Diagonalen invertierbar ist und deshalb auch in einer Umgebung W der Diagonalen. Wähle $\chi \in C_0^\infty(W)$ mit $\chi = 1$ auf einer Umgebung des Trägers von $p(x,\xi) = \mathrm{symb}(P)$ in x, der hier entlang der Diagonalen eingebettet sei. Mit der Jacobideterminante $J(x) = |\det D\psi(x)|$ gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_* P)u(x) = P(u\circ\varphi)(\widetilde{x}) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \widetilde{x}-\widetilde{y},\xi\rangle} p(\widetilde{x},\xi)u(\varphi(\widetilde{y}))\,d\widetilde{y}\,d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \Psi(x,y)(x-y),\xi\rangle} p(\psi(x),\xi)u(y)J(y)\,dy\,d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left\langle x-y,\Psi(x,y)^T\xi\right\rangle} p(\psi(x),\xi)u(y)J(y)\,dy\,d\xi.\end{aligned}$$

Schreibe $I(x,y,\xi)$ für den obigen Integranden. Es gilt $I(x,y,\xi) = \chi(x,y)I(x,y,\xi) + (1-\chi(x,y))I(x,y,\xi)$. Der zweite Summand definiert einen Glättungsoperator. Mit $\Theta(x,y)^T = \Psi(x,y)^{-1}$ und $\xi = \Theta(x,y)\eta$ gilt für den ersten Summanden

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\chi I)(x,y,\xi)\,dy\,d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\eta\rangle} a(x,y,\eta)u(y)\,dy\,d\xi.$$

wobei $a(x,y,\eta) = \chi(x,y)p(\psi(x),\Theta(x,y)\eta)J(y)|\det\Theta(x,y)|$.[3] Propositio 4.6 liefert dann, dass $\varphi_* P$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung d ist. ☐

Bemerkung 4.15. Weiterhin haben wir eine asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}\mathrm{symb}(\varphi_* P) &\sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\eta^\alpha D_y^\alpha)a(x,x,\eta) = \\ &\equiv p\left(\widetilde{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial\widetilde{x}}\right)^T \eta\right) \pmod{\mathrm{Symb}^{d-1}}\end{aligned}$$

Das heißt $\sigma(P) = \mathrm{symb}(P) \bmod \mathrm{Symb}^{d-1}$ transformiert sich wie eine Funktion auf $T^\vee\mathbb{R}^n$.

Definition 4.16. Für $P \in \Psi DO^d$ heißt $\sigma(P) = [\mathrm{symb}(P)] \in {}^{\mathrm{Symb}^d}\!/\!_{\mathrm{Symb}^{d-1}}$ das *Hauptsymbol* von P.

[3]**TODO**: Kann man die Integrationsreihenfolge vertauschen?

5 Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit komplexen Vektorbündeln E und F.

Definition 5.1. Ein linearer Operator $P\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ heißt *Pseudodifferentialoperator der Ordnung* d, falls für alle Karten $\varphi\colon U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ mit V relativ kompakt und Bündelkarten $\phi^E\colon E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$ und $\phi^F\colon F|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^s$ und alle $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(U)$ der mittels φ, ϕ^E und ϕ^F auf U lokalisierte Operator $P^\chi = \chi_1 \circ P \circ \chi_2\colon C_0^\infty(U, \mathbb{C}^r) \longrightarrow C_0^\infty(U, \mathbb{C}^s)$ ein Pseudodifferentialoperator in $\Psi DO^d(V)$ ist.

Wir schreiben $\Psi DO^d(E, F)$ für den Raum der Pseudodifferentialoperatorn von E nach F von Ordnung d und $\Psi DO(E, F)$ für den Raum aller Differentialoperatoren von E nach F. Analog schreiben wir $\Psi DO^{-\infty}(E, F)$ für die Glättungsoperatoren von E nach F.

Bemerkung 5.2. Ist $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ eine offene Überdeckung und $\{\chi_i\}_i$ eine zugehörige Zerlegung der 1, dann ist

$$Pu = \sum_i \chi_i P u = \sum_{i,j} \chi_i P(\chi_j u) = \sum_{i,j} P_{ij} u$$

für $P_{ij} = \chi_i \circ P \circ \chi_j$.

Definition 5.3. Ein Schnitt $p \in \Gamma(T^\vee M; \pi^* \operatorname{Hom}(E, F))$ mit $\pi\colon T^\vee M \longrightarrow M$ heißt *Symbol der Ordnung* d, falls $\chi p \in \operatorname{Symb}^d(V)$ für jede Karte $\varphi\colon U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ mit V relativ kompakt und $\chi \in C_0^\infty(U)$ gilt – entlang der Identifizierung $\Gamma(T^\vee M|_U; \pi^* \operatorname{Hom}(E, F)) \cong C^\infty(V \times \mathbb{R}^n, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$. Wir schreiben $\sigma(p)$ für das zugehörige *Hauptsymbol* in $\operatorname{Symb}^d(E,F) / \operatorname{Symb}^{d-1}(E,F)$.

Propositio 5.4. *Der Symbolkalkül globalisiert sich:*

(i) *Seien hermitesche Metriken h^E und h^F, eine Riemannsche Metrik auf M und eine Orientierung von M gegeben. Sei $P \in \Psi DO^d(E, F)$ und $P^* \in \Psi DO^d(F, E)$ formal adjungiert zu P. Dann gilt für die Hauptsymbole $\sigma(P^*) = \sigma(P)^*$.*

(ii) *Sind $P \in \Psi DO^d(E, F)$ und $Q \in \Psi DO^e(D, E)$, so ist $P \circ Q \in \Psi DO^{d+e}(D, F)$ und das Symbol ist $\sigma(P \circ Q) = \sigma(P)\sigma(Q)$.*

Fixiere Karten $\varphi_i\colon U_i \longrightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ mit V_i relativ kompakt, die M überdecken. Seien außerdem $\phi_i^E\colon E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$ zugehörige Bündelkarten und $(\chi_i)_i$ eine untergeordnete Partition der Eins. Setze

$$\|u\|_{H^s}^2 = \sum_i \|\chi_i u\|_{H^s}^2$$

für $u \in \Gamma(E)$, wobei $\chi_i u$ entlang φ_i und ϕ_i^E als Element von $C_0^\infty(V, \mathbb{C}^r)$ aufgefasst sei. Man kann zeigen, dass diese Definition von $\|\_\|_{H^s}$ bis auf den Äquivalenz nicht von den obigen Wahlen abhängt und für $k \in \mathbb{N}$ kompatibel mit $\|u\|_{H^k}^2 = \sum_i \|\nabla^i u\|^2$. Die Vervollständigung $H^s(E)$ von $\Gamma(E)$ bezüglich $\|\_\|_{H^s}$ hängt insbesondere als topologischer Raum nicht von diesen Wahlen ab.

Propositio 5.5.

(i) *Bei fixierten Wahlen von Metriken ist $H^s(E)$ ein Hilbertraum.*

(ii) *Die Inklusion $H^s(E) \hookrightarrow H^t(E)$ ist stetig für $s \geqslant t$ und kompakt für $s > t$.*

(iii) *Die Inklusion $H^s(E) \hookrightarrow C^k(E)$ ist stetig für $s > k + n/2$.*

Propositio 5.6. *Sei $P \in \Psi DO^d(E, F)$. Dann definiert P einen stetigen Operator $P\colon H^{s+d}(E) \longrightarrow H^s(F)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass ein Atlas $\{U_1, \ldots, U_N\}$ von M mit weiteren Karten $\varphi_{ij} \colon U_{ij} \longrightarrow V_{ij}$ existiert, so dass $U_i \cup U_j \subset U_{ij}$. Sei außerdem $(\chi_i)_i$ eine untergeordnete Partition der Eins. Wähle Funktionen $\overline{\chi}_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $\overline{\chi}_j = 1$ auf $\operatorname{supp}(\chi_j)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{H^s} &= \Big\| \sum_{i,j} \chi_i P(\chi_j u) \Big\|_{H^s} \leqslant \sum_{i,j} \|\chi_i P(\chi_j u)\|_{H^s} = \\ &= \sum_{i,j} \|\chi_i P \overline{\chi}_j (\chi_j u)\|_{H^s} \leqslant \sum_{i,j} C_{i,j} \|\chi_j u\|_{H^{s+d}} \leqslant C \|u\|_{H^{s+d}} \end{aligned}$$

für Konstanten $C_{i,j}$ und C. □

6 Elliptizität und Parametrix

Zunächst arbeiten wieder lokal.

Definition 6.1. Ein Pseudodifferentialoperator $P \in \Psi\mathrm{DO}^d$ heißt *elliptisch* über einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, wenn es eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^n$ und Konstanten $C_0, C_1 > 0$ gibt, mit $\overline{U} \subset U'$ und

(i) das Symbol $p(x,\xi)$ ist invertierbar für alle $x \in U'$ und $|\xi| > C_0$.

(ii) der Abschätzung $|p(x,\xi)^{-1}| \leqslant C_1(1+|\xi|)^{-d}$ für alle $x \in U'$ und $|\xi| > C_0$.

In diesem Fall nennt man $p(x,\xi)$ ein *elliptisches Symbol* über U.

Bemerkung 6.2.

(i) Man kann zeigen, dass ein Symbol $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha(x)\xi^\alpha$ genau dann elliptisch ist, wenn $\sigma(P) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha$ für alle $\xi \neq 0$ invertierbar ist.

(ii) Elliptizität hängt nur vom Verhalten höchster Ordnung ab: Ist $p \in \mathrm{Symb}^d$ und $q \in \mathrm{Symb}^{d-1}$, so ist p genau dann elliptisch, wenn $p+q$ es ist.

(iii) Es gibt elliptische Symbole beliebiger Ordnung.

Satz 6.3. *Sei* $P \in \Psi\mathrm{DO}^d$ *elliptisch über* U. *Dann gilt:*

(i) *Es existiert ein* $Q \in \Psi\mathrm{DO}^{-d}$, *so dass* $\psi(QP - \mathrm{id}) \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$ *und* $\psi(PQ - \mathrm{id}) \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$ *für alle* $\psi \in C_0^\infty(U)$. *Dadurch ist* Q *bis auf Glättungsoperatoren über* U *eindeutig bestimmt und heißt* Parametrix *von* P *über* Q.

(ii) *Es gilt das* Weyl–Lemma*: Ist* $Pu|_U$ *glatt, dann ist* $u|_U$ *glatt.*

(iii) *Es gilt die* Gårding–Ungleichung*: Es gibt eine Konstante* $C > 0$*, so dass*

$$\|u\|_{H^{d+s}} \leqslant C(\|u\|_{H^s} + \|Pu\|_{H^s}).$$

Insbesondere ist $\|\_\|_{H^d}$ *äquivalent zu* $\|\_\|_{L^s} + \|P\_\|_{L^2}$ *auf* $C_0^\infty(U)$.

Beweis. Setze $q_0(x,\xi) = \phi(x)\chi(|\xi|)p(x,\xi)^{-1}$, wobei $\phi \in C_0^\infty(U')$ und $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ so gewählt seien, dass $\phi = 1$ auf U, $\chi(t) = 1$ für $t \geqslant 2C_0$ und $\chi(t) = 0$ für $t \leqslant C_0$. Dann gilt offenbar $q_0 p - \mathrm{id} = 0 = pq_0 - \mathrm{id}$ auf $U \times \{|\xi| \geqslant 2C_0\}$. Außerdem ist $q_0(x,\xi) \in \mathrm{Symb}^{-d}$:

Wegen der Elliptizität von p haben wir $|q_0(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-d-|\beta|}$. Für die höheren Ableitungen haben wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} pp^{-1} = \frac{\partial p}{\partial x_i} p^{-1} + p\frac{\partial p^{-1}}{\partial x_i}$$

und deswegen

$$\frac{\partial p^{-1}}{\partial x_i} = -p^{-1}\frac{\partial p}{\partial x_i}p^{-1} = O((1+|\xi|)^{-d})$$

und genauso

$$\frac{\partial p^{-1}}{\partial \xi_i} = -p^{-1}\frac{\partial p}{\xi_i}p^{-1} = O((1+|\xi|)^{-d-1}).$$

Nach Induktion folgen daraus die Symbolabschätzungen für q_0.

Das Symbol q_0 definiert also einen Pseudodifferentialoperator $Q_0 \in \Psi\mathrm{DO}^{-d}$. Nach Satz 4.13 ist

$$\mathrm{symb}(\psi(Q_0P - \mathrm{id})) \sim \psi(q_0 p - \mathrm{id}) + \psi \sum_{\alpha \neq 0} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q_0)(D_x^\alpha p)$$

für ein $\psi \in C_0^\infty(U)$. Hierin ist der zweite Summand ein Symbol der Ordnung -1 und $q_0 p - \mathrm{id} = 0$ für $x \in U$ und $|\xi| \geqslant 2C_0$. Das heißt, $\operatorname{symb}(\psi(Q_0 P - \mathrm{id})) \in \Psi\mathrm{DO}^{-1}$.

Wir machen den Ansatz $q = \sum_k q_k$ mit $q_k \in \mathrm{Symb}^{-d-k}$ für das Symbol des gesuchten Pseudodifferentialoperators Q. In dem Fall müsste gelten, dass

$$0 \sim \psi\Big(\sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q)(D_x^\alpha p) - \mathrm{id}\Big) \sim \psi \sum_{\alpha,j} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q_j)(D_x^\alpha p) - \mathrm{id}\,.$$

Nach Oben ist der Anteil in Symb^0 ist $\psi(q_0 p - \mathrm{id}) \sim 0$. Für $k > 0$ ist der Anteil in Symb^k genau

$$\psi \sum_{j+|\alpha|=k} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q_j)(D_x^\alpha p) = \psi \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=k-j} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q_j)(D_x^\alpha p) + q_k p \overset{!}{\sim} 0.$$

Diese Relation lässt sich induktiv durch

$$q_k = -q_0 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=k-j} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q_j)(D_x^\alpha p)$$

lösen. Dann wird durch $q = \sum_k q_k$ ein Pseudodifferentialoperator $Q \in \Psi\mathrm{DO}^{-d}$ definiert und nach Satz 4.13 gilt dann $\psi(QP - \mathrm{id}) \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$ für alle $\psi \in C_0^\infty(U)$,d. h. Q ist eine Linksparametrix über U. Analog zeigt man, dass eine Rechtsparametrix $Q'' \in \Psi\mathrm{DO}^{-d}$ über U..

Sei $Q' \in \Psi\mathrm{DO}^{-d}$ eine weitere Linksparametrix über U. Dann ist $\psi(Q - Q')P \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$ für alle $\psi \in C_0^\infty(U)$. Also folgt

$$\psi(Q - Q') = \psi(Q - Q')PQ'' - \psi(Q - Q')S \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$$

für eine Operator $S \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$,d. h. Q und Q' sind äquivalent über U. Analog zeigt man, dass eine Rechtsparametrix bis auf Glättungsoperatoren eindeutig ist. Weiterhin gilt

$$\psi(Q - Q'') = \psi(Q - QPQ'') + \psi(QPQ'' - Q'') = \psi Q(\mathrm{id} - PQ'') + \psi(QP - \mathrm{id})Q'' \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(U)$ und deshalb Q und Q'' äquivalent über U.

Zum Beweis des Weyl–Lemmas sei $Pu|_U$ glatt für $u \in H^s$. Für $\psi \in C_0^\infty(U)$ gilt

$$\psi u = \psi(\mathrm{id} - QP)u + \psi QPu \in C^\infty(U)$$

denn $\psi(\mathrm{id} - QP) \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$, $Pu|_U \in C^\infty$ und Q ist pseudolokal.

Für die Gårding–Ungleichung sei $u \in C_0^\infty(U)$ und $\psi \in C_0^\infty(U)$ mit $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp}(u)$. Dann ist $u = \psi(QPu + Su)$ für ein $S \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}$ und deswegen

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{s+d}} &\leqslant \|\psi QPu\|_{H^{s+d}} + \|\psi Su\|_{H^{s+d}} \leqslant C'\|QPu\|_{H^{s+d}} + C'\|Su\|_{H^{s+d}} \leqslant \\ &\leqslant C(\|Pu\|_{H^s} + \|u\|_{H^s}).\end{aligned}$$

□

Definition 6.4. Ein Operator $P \in \Psi\mathrm{DO}^d(E, F)$ heißt *elliptisch*, wenn für alle Karten $\varphi\colon U \longrightarrow V$ mit Bündelkarten $\phi^E\colon E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$ und $\phi^F\colon F|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^s$ und $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(U)$, der Pseudodifferentialoperator $\chi_1 \circ P \circ \chi_2 \in \Psi\mathrm{DO}^d(U)$ über $\{\chi_1\chi_2 \neq 0\}$ elliptisch ist.

Satz 6.5. *Sei* $P \in \Psi\mathrm{DO}^d(E, F)$ *elliptisch. Dann gilt*

(i) *Es existiert ein* $Q \in \Psi DO^{-d}(F, E)$*, so dass* $QP - \mathrm{id} \in \Psi DO^{-\infty}(E, E)$ *und* $PQ - \mathrm{id} \in \Psi DO^{-\infty}(F, F)$. *Der Operator* Q *ist wieder bis auf Glättungsoperatoren eindeutig und heißt* globale Parametrix.

(ii) *Ist* $u \in H^s(E)$*,* $U \subset M$ *offen und* $Pu|_U \in C^\infty$*, dann ist auch* $u|_U \in C^\infty$.

(iii) *Es gilt*

$$\|u\|_{H^{s+d}} \leqslant C(\|u\|_{H^s} + \|Pu\|_{H^s})$$

für alle $u \in \Gamma(E)$.

Beweis. Sei $(\chi_i)_i$ eine Partition der Eins bezüglich einem Atlas $\{U_1, \ldots, U_N\}$ von M mit zugehörigen Karten bzw. Bündelkarten φ_i, ϕ^E und ϕ^F. Sei außerdem $\overline{\chi}_i \in C_0^\infty(U_i)$ mit $\overline{\chi}_i = 1$ auf einer Umgebung von $\mathrm{supp}(\chi_i)$. Dann ist $P_i = \overline{\chi}_i \circ P \circ \overline{\chi}_i \in \Psi DO^d(U_i)$ elliptisch über $W_i = \mathrm{supp}(\chi)_\varepsilon$ für $\varepsilon \ll 1$. Sei $Q_i \in \Psi DO^{-d}(\mathrm{supp}(\chi_i)_{2\varepsilon})$ die Parametrix von P_i über W_i nach Satz 6.3. Definiere einen Pseudodifferentialoperator $Q = \sum_{i=1}^N Q_i \psi_i \in \Psi DO^{-d}(F, E)$. Sei P_ε P eine ε–lokale Approximation von P.

$$\begin{aligned} PQu &= \sum_{i=1}^N PQ_i\chi_i u = \sum_{i=1}^N P\overline{\chi}_i Q\chi_i u \sim \sum_{i=1}^N P_\varepsilon \overline{\chi}_i Q_i \chi_i u = \\ &= \sum_{i=1}^N \overline{\chi}_i P_\varepsilon \overline{\chi}_i Q_i \chi_i u \sim \sum_{i=1}^N P_i Q_i \chi_i u \sim u. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.6. Man erhält eine invariante Definition von H^s für $s > 0$: Sei $Q \in \Psi DO^{s/2}(E)$ und betrachte $P = Q^*Q + \mathrm{id} \in \Psi DO^s(E)$. Setze $\|u\|_{H^s_P} = \|Pu\|_{L^2}$ für $u \in \Gamma(E)$. Dann ist $\|\_\|_{H^s_P}$ äquivalent zu $\|\_\|_{H^s}$.

Weiterhin induziert das Skalarprodukt $\langle \_, \_ \rangle_{L^2} : \Gamma(E) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige und perfekte Paarung $H^s(E) \otimes H^{-s}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ und deshalb einen Isomorphismus $H^s(E)^* \cong H^{-s}(E)$.

7 Fredholmoperatoren und Index

Definition 7.1. Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Ein beschränkter linearer Operator $T\colon H_1 \longrightarrow H_2$ heißt *Fredholmoperator*, falls gilt

(i) $\mathrm{im}(T) \subset H_2$ ist abgeschlossen.
(ii) $\ker(T) \subset H_1$ ist endlichdimensional.
(iii) $\mathrm{coker}(T) \cong \mathrm{im}(T)^\perp \subset H_2$ ist endlichdimensional.

Die Zahl $\mathrm{ind}(T) = \dim\ker(T) - \dim\mathrm{coker}(T) \in \mathbb{Z}$ heißt *Index* von T.

Bemerkung 7.2.

(i) Ist T beschränkt, so ist $\ker(T)$ immer abgeschlossen, $\mathrm{im}(T)$ aber im Allgemeinen nicht.
(ii) Ist $T\colon H_1 \longrightarrow H_2$ beschränkt, so ist auch das Adjungierte $T^*\colon H_2 \longrightarrow H_1$ beschränkt und es gilt $\mathrm{coker}(T) \cong \mathrm{im}(T)^\perp = \ker(T^*)$. Insbesondere ist $\mathrm{ind}(T) = \dim\ker(T) - \dim\ker(T^*)$ für Fredholmoperatoren T; ist T zusätzlich selbstadjungiert, so folgt $\mathrm{ind}(T) = 0$.

Definition 7.3. Ein Operator $T\colon H_1 \longrightarrow H_2$ heißt *kompakt*, falls für alle beschränkten Teilmengen $B \subset H_1$ das Bild $T(B) \subset H_2$ relativ kompakt ist.

Bemerkung 7.4.

(i) Ist $\mathrm{im}(T) \subset H_2$ endlichdimensional, so ist T kompakt.
(ii) Die Menge $K(H_1, H_2)$ von kompakten Operatoren ist abgeschlossen im Raum $B(H_1, H_2)$ der beschränkten Operatoren.
(iii) Ist T kompakt und S beschränkt, so sind TS und ST kompakt.
(iv) Ist T kompakt, so auch T^*.

Fredholmoperatoren sind genau die beschränkten Operatoren, die modulo kompakten Operatoren invertierbar sind:

Propositio 7.5. *Ein beschränkter Operator* $T\colon H_1 \longrightarrow H_2$ *ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn es einen beschränkten Operator* $S\colon H_2 \longrightarrow H_1$ *gibt, so dass* $ST - \mathrm{id} = K_1$ *und* $TS - \mathrm{id} = K_2$ *kompakt sind.*

Beweis. Wir zerlegen $H_1 = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$ und $H_2 = \mathrm{im}(T) \oplus \mathrm{im}(T)^\perp$. Dann ist die Einschränkung $T|_{\ker(T)^\perp}\colon \ker(T)^\perp \longrightarrow \mathrm{im}(T)$ bijektiv und stetig und, da $\mathrm{im}(T)$ abgeschlossen ist, damit invertierbar. Setze $S = T^{-1}\colon \mathrm{im}(T) \longrightarrow \ker(T)^\perp$ durch 0 auf $\mathrm{im}(T)^\perp$ zu einem beschränkten Operator $S\colon H_2 \longrightarrow H_1$ fort. Dann ist $TS - \mathrm{id}$ bis auf Vorzeichen die Projektion auf $\mathrm{im}(T)^\perp$ und $ST - \mathrm{id}$ bis auf Vorzeichen die Projektion auf $\ker(T)$. Wegen $\dim\ker(T) < \infty$ und $\dim\mathrm{coker}(T) < \infty$ sind beide Projektionen kompakt.

Sei umgekehrt ein beschränkter Operator $S\colon H_2 \longrightarrow H_1$ wie in der Propositio gegeben. Dann ist $K_1|_{\ker(T)} = -\mathrm{id}_{\ker(T)}$ und $K_2|_{\mathrm{im}(T)^\perp} = -\mathrm{id}_{\mathrm{im}(T)^\perp}$ und wegen Kompaktheit $\ker(T)$ und $\mathrm{coker}(T)$ endlichdimensional. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{im}(T) \subset H_2$ abgeschlossen ist. Sei ohne Einschränkung T injektiv und (u_k) eine Folge in H_1 mit $\lim Tu_k = v \in H_2$. Angenommen, (u_k) wäre nicht beschränkt. Ersetze dann u_k durch eine Teilfolge mit $\|u_k\| \to \infty$. Sei $\widetilde{u}_k = u_k/\|u_k\|$. Dann gilt

$$T\widetilde{u}_k = \frac{1}{\|u_k\|} Tu_k \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Aber $\|\widetilde{u}_k\| = 1$ und deshalb hat $K_1\widetilde{u}_k = ST\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_k$ eine konvergente Teilfolge. Die Folge $ST\widetilde{u}_k$ konvergiert gegen 0 und deshalb existiert (nach Übergang zu einer Teilfolge) ein $\widetilde{u} = \lim_k \widetilde{u}_k$. Aber $\|\widetilde{u}\| = 1$ und $T\widetilde{u} = 0$ im Widerspruch zur Injektivität von T.

Da (u_k) beschränkt ist, hat wir oben $K_1 u_k$ eine konvergente Teilfolge und STu_k konvergiert gegen v. Es folgt, dass (u_k) gegen ein u konvergiert und $Tu = \lim_k Tu_k = v$. ☐

Korollar 7.6.
(i) *Ist* T *beschränkt und invertierbar, so ist* T *ein Fredholmoperator mit Index* $\operatorname{ind}(T) = 0$.
(ii) *Ist* T *ein Fredholmoperator, so auch* T^* *und es gilt* $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$.
(iii) *Sind* $T_1 \colon H_1 \longrightarrow H_2$ *und* $T_2 \colon H_2 \longrightarrow H_3$ *Fredholmoperatoren, so auch ihre Komposition* T_2T_1 *und es gilt* $\operatorname{ind}(T_2T_1) = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$.

Propositio 7.7. *Sei* $P \in \Psi DO^d(E,F)$ *elliptisch. Dann ist* $P_s \colon H^{s+d}(E) \longrightarrow H^s(F)$ *ein Fredholmoperator für alle* $s \in \mathbb{R}$ *und* $\operatorname{ind}(P) = \operatorname{ind}(P_s)$ *ist unabhängig von* s.

Beweis. Sei $Q \in \Psi DO^{-d}(E,F)$ eine Parametrix zu P. Lemma 3.5 impliziert, dass dann die Operatoren $QP - \mathrm{id} \colon H^{s+d}(E) \longrightarrow H^{s+d}(E)$ und $PQ - \mathrm{id} \colon H^s(F) \longrightarrow H^s(F)$ kompakt sind. Es folgt, dass P_s einen Fredholmoperator definiert. Wegen des Weyl–Lemmas ist jedes u mit $P_s u = 0$ bereits glatt und deswegen $\ker(P_s)$ unabhängig von s. Die perfekte Paarung $H^s(F) \otimes H^{-s}(F) \longrightarrow \mathbb{C}$ impliziert, dass es einen Isomorphismus $\operatorname{coker}(P_s) \cong \ker P^*$ mit $P^* \colon H^{-s}(E) \longrightarrow H^{-s-d}(F)$ gibt. Wieder ist $\operatorname{coker}(P_s)$ unabhängig von s wegen des Weyl–Lemmas. □

Korollar 7.8 (Fredholmalternative). *Eine elliptische Gleichung* $Pu = v$ *mit* $v \in \Gamma(E)$ *ist genau dann lösbar, wenn* $v \perp \ker(P^*)$. *Die Lösung ist eindeutig für* $u \in \ker(P)^\perp$

Wir schreiben $F(H_1, H_2)$ für den Raum der Fredholmoperatoren von H_1 nach H_2. Man kann zeigen, dass die Indexabbildung $\operatorname{ind} \colon F(H_1, H_2) \longrightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist.

Propositio 7.9. *Seien* H_1 *und* H_2 *separable Hilberträume.*
(i) *Der Unterraum* $F(H_1, H_2) \subset B(H_1, H_2)$ *ist offen bezüglich der Normtopologie.*
(ii) *Die Indexabbildung* $\operatorname{ind} \colon F(H_1, H_2) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *ist lokal konstant.*

Beweis. Sei $T \in F(H_1, H_2)$. Wir zerlegen $H_1 = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$ und $H_2 = \operatorname{im}(T)^\perp \oplus \operatorname{im}(T)$. Setze $H_1' = \operatorname{coker}(T) \oplus H_1$ und $H_2' = \ker(T) \oplus H_2$. Für $S \in B(H_1, H_2)$ sei

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{\ker(T)} \\ \iota_{\operatorname{coker}(T)} & S \end{pmatrix} \in B(H_1', H_2')$$

mit der Projektion $\pi_{\ker(T)} \colon H_1 \longrightarrow \ker(T)$ und der Inklusion $\iota_{\operatorname{coker}(T)} \colon \operatorname{coker}(T) \cong \operatorname{im}(T)^\perp \longrightarrow H_2$. Die Zuordnung $S \longmapsto S'$ liefert eine stetige Abbildung $B(H_1, H_2) \longrightarrow B(H_1', H_2')$ und es gilt $S = \pi_{H_2} S' \iota_{H_1}$. Für $S = T$ ist

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{\ker(T)} \\ \iota_{\operatorname{coker}(T)} & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{\ker(T)} & 0 \\ \mathrm{id}_{\operatorname{coker}(T)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T|_{\ker(T)^\perp} \end{pmatrix}$$

bezüglich den Zerlegungen $H_1' = \operatorname{coker}(T) \oplus \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$ und $H_2' = \ker(T) \oplus \operatorname{im}(T)^\perp \oplus \operatorname{im}(T)$. Das heißt, T' ist invertierbar, denn $T|_{\ker(T)^\perp} \colon \ker(T)^\perp \longrightarrow \operatorname{im}(T)$ ist ein Isomorphismus. Wir wissen, dass die invertierbaren Operatoren $B^\times(H_1', H_2') \subset B(H_1', H_2')$ offen bezüglich der Normtopologie sind. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass S' invertierbar ist, falls $\|S - T\| < \varepsilon$. Insbesondere ist in diesem Fall S' ein Fredholmoperator. Es folgt, dass $S = \pi_{H_2} S' \iota_{H_1}$ ebenso ein Fredholmoperator ist. Außerdem gilt dann $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(\pi_{H_2}) + \operatorname{ind}(S') + \operatorname{ind}(\iota_{H_1}) = \operatorname{ind}(T)$ für den Index. □

Beispiel 7.10. Sei T ein Fredholmoperator und K kompakt. Dann ist auch $T + tK$ ein Fredholmoperator für alle $t \in [0, 1]$. Insbesondere gilt nach Propositio 7.9 für die Indizes $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$.

Propositio 7.11. *Seien* $T, T' \in F(H_1, H_2)$ *Fredholmoperatoren mit* $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T')$. *Dann liegen* T *und* T' *in derselben Wegzusammenhangskomponente von* $F(H_1, H_2)$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T') \geqslant 0$, ansonsten geht man zu T^* und $(T')^*$ über. Zunächst zeigen wir: Ist $\operatorname{ind}(T) \geqslant 0$, so ist T durch Fredholmoperatoren homotop zu einem surjektiven Operator. In der Tat ist dann $\dim\ker(T) \geqslant \dim\operatorname{coker}(T)$ und es gibt einen surjektiven Operator $L\colon \ker(T) \longrightarrow \operatorname{coker}(T)$. Betrachte L als durch 0 zu einem Operator $H_1 \longrightarrow H_2$ fortgesetzt. Dann definiert $T + tL$ für $t \in [0, 1]$ eine Homotopie zwischen T und $T + L$; der Operator $T + L$ ist aber surjektiv. Wir können also Annehmen, dass T und T' surjektiv sind.

Zerlege $H_1 = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp = \ker(T') \oplus \ker(T')^\perp$. Wegen $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T')$ gibt es einen Isomorphismus $A\colon \ker(T) \longrightarrow \ker(T')$. Außerdem ist $B = (T'|_{\ker(T')^\perp}) \circ T\colon \ker(T)^\perp \longrightarrow \ker(T')^\perp$ ein Isomorphismus. Setze

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\colon \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp \xrightarrow{\sim} \ker(T') \oplus \ker(T')^\perp.$$

Der Raum $B^\times(H_1)$ ist wegzusammenhängend, d. h. es gibt eine Homotopie durch invertierbare Operatoren C_t von C nach id. Dann ist $T_t = T'C_t$ eine Homotopie von T nach T'. □

Korollar 7.12. *Es folgt, dass* $F(H_1, H_2) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{ind}^{-1}(k)$ *genau die Zerlegung in Wegzusammenhangskomponenten ist.*

Korollar 7.13. *Der Raum* $\pi_0 F(H)$ *ist eine Gruppe und* $\operatorname{ind}\colon \pi_0 F(H) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *ist ein Isomorphismus.*

Bemerkung 7.14. Sei $C \in B^\times(H)$. Dann gibt es eine Zerlegung $C = UA$ für $A = \sqrt{C^*C}$ positiv und selbstadjungiert, und U unitär. Der Spektralsatz impliziert, dass der Raum von positiven und selbstadjungierten Operatoren konvex, also zusammenziehbar, ist. Schreibt man $U = e^{iT}$ für T selbstadjungiert, so definiert $U_t = e^{itH}$ eine Homotopie durch unitäre Operatoren von id nach U.

Satz 7.15 (Kuiper). *Die unitäre Gruppe* $U(H)$ *eines* unendlichdimensionalen *Hilbertraums* H *ist zusammenziehbar.*

Satz 7.16 (Atiyah–Jänich). *Es gibt eine natürliche Bijektion* $K(X) \cong [X, F(H)]$ *für jeden separablen, unendlichdimensionalen Hilbertraum* H.

Definition 7.17. Elliptische Operatoren $P, P' \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ heißen *homotop*, wenn es eine stetige Familie elliptischer $P_t \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ mit $P_0 = P$ und $P_1 = P'$ gibt.

Korollar 7.18. *Sind* P *und* P' *elliptische und homotop, so ist* $\operatorname{ind}(P) = \operatorname{ind}(P')$.

Beweis. In diesem Fall ist $P_t\colon H^{s+k}(E) \longrightarrow H^s(F)$ eine stetige Familie von Fredholmoperatoren. □

Korollar 7.19. *Der Index eines elliptischen Operator* $P \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ *hängt nur von seinem Hauptsymbol* $\sigma(P) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k(TM) \otimes \mathrm{Hom}(E, F))$ *ab.*

Beweis. Ist $\sigma(P) = \sigma(P')$, so definiert $P_t = (1 - t)P + tP'$ eine Homotopie durch elliptische Operatoren von P nach P', da $\sigma(P_t) = \sigma(P)$ für alle t. □

Definition 7.20. Symbole $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k(TM) \otimes \mathrm{Hom}(E, F))$ heißt *regulär homotop*, wenn es eine Homotopie σ_t durch elliptische Symbole von σ nach σ' gibt.

Korollar 7.21. *Der Index von* $P \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ *hängt nur von der regulären Homotopieklasse von* $\sigma(P)$ *ab.*

Beweis. Sei σ_t eine reguläre Homotopie von $\sigma(P)$ nach $\sigma(P')$. Dann gibt es eine stetige Familie elliptischer Operatoren $P_t \in \mathrm{PDO}^k(E, F)$ mit $\sigma(P_t) = \sigma_t$: Wähle einen Zusammenhang ∇ auf E. Wir haben bereits gezeigt, dass $P_t = \sigma_t \circ ((\mathrm{Sym}^k \otimes \mathrm{id}^E) \circ \nabla^k)$ ein Differentialoperator mit Symbol σ_t ist. □

Bemerkung 7.22.

(i) Sei $P \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$ ein elliptischer Operator. Dann gibt es immer eine natürliche orthogonale Zerlegung $L^2(E) = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P^*\colon H^k(F) \longrightarrow L^2(E))$ und mittels elliptischer Regularität erhält man sogar eine L^2–orthogonale Zerlegung $\Gamma(E) = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P^*\colon \Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(E))$. Insbesondere gilt $\Gamma(E) = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P)$, wenn $P\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ formal selbstadjungiert ist.

(ii) Sei $P \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$ elliptisch und betrachte $P\colon H^k(E) \longrightarrow L^2(F)$. Dann ist die Einschränkung $P|_{\ker(P)^\perp}\colon \ker(P)^\perp \longrightarrow \operatorname{im}(P)$ ein Isomorphismus. Definiere einen beschränkten Operator

$$G = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : L^2(F) = \operatorname{im}(P) \oplus \operatorname{im}(P)^\perp \longrightarrow \ker(P)^\perp \oplus \ker(P) = H^k(E),$$

den *Green–Operator* zu P. Nach dem Weyl–Lemma ist $G(\Gamma(F)) \subset \Gamma(E)$ und nach dem Rellich–Lemma ist die Komposition $G\colon L^2(F) \longrightarrow H^k(E) \longrightarrow L^2(E)$ kompakt. Man kann sogar zeigen, dass $G \in \Psi\mathrm{DO}^{-k}(F,E)$. Es gilt $GP = \mathrm{id} - \pi_{\ker(P)}$ und $PG = \mathrm{id} - \pi_{\ker(P^*)}$. Die Operatoren $\pi_{\ker(P)}$ und $\pi_{\ker(P^*)}$ sind dabei Glättungsoperatoren mit endlichdimensionalem Bild, denn für eine L^2–Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_N$ von $\ker(P)$ ist

$$\pi_{\ker(P)}(u) = \sum_{i=1}^{N} \langle u, u_i \rangle_{L^2} u_i.$$

Das heißt, $\pi_{\ker(P)}$ hat Integralkern

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x) \otimes \langle \_, u_i(y) \rangle \in \operatorname{Hom}(E_y, E_x).$$

8 Elliptische Komplexe und Hodgetheorie

Seien $(E_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ komplexe Vektorbündel über M mit $E_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{Z}$ und $P_j\colon E_j \longrightarrow E_{j+1}$ Differentialoperatoren der Ordnung $k \geqslant 0$.

Definition 8.1. Das Tupel $(E_j, P_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ heißt *elliptischer Komplex* der Ordnung k, falls

(i) $P_{j+1}P_j = 0$ für alle j.
(ii) $\operatorname{im}\sigma(P_j)(\xi) = \ker\sigma(P_{j+1})(\xi)$ für alle $\xi \neq 0$.

Wähle hermitesche Metriken h^{E_j} und eine Riemannsche Metrik g. Außerdem sei M orientiert. Dann bilden die formal adjungierten Operatoren zu den P_j einen elliptischen Komplex

$$\cdots \longrightarrow \Gamma(E_{j+2}) \xrightarrow{P^*_{j+1}} \Gamma(E_{j+1}) \xrightarrow{P^*_j} \Gamma(E_j) \longrightarrow \cdots,$$

den wir zusammen mit P^* bezeichnen. Beachte, dass wir hier $(P^*)_j = P^*_{j-1}$ schreiben. Setze außerdem $E = \bigoplus_j E_j$, $P = \bigoplus_j P^j$ und $P^* = \bigoplus_j (P^*)_j$. Sei $D = P + P^*\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ der *assoziierte Diracoperator* und $\Delta = D^2 = PP^* + P^*P$ der *assoziierte Laplaceoperator.* Letzerer lässt sich zu Operatoren $\Delta_j\colon \Gamma(E_j) \longrightarrow \Gamma(E_j)$, der Diracoperator ist hingegen nur ein ungerader Operator bezüglich der induzierten $\mathbb{Z}/2$–Graduierung auf P.

Beispiel 8.2. Sei $E_j = \Lambda^j T^*M$ und $P_j = d\colon \Lambda^j T^*M \longrightarrow \Lambda^{j+1}T^*M$ das de Rham–Differential. Schreibe $(P^*)_j = \delta$. Dann ist $D = d + \delta$ der *Hodge–Dirac–Operator* und $\Delta = D^2 = d\delta + \delta d$ der *Hodge–Laplace–Operator.*

Lemma 8.3. *Für jeden elliptischen Komplex sind die Operatoren Δ und D elliptisch.*

Beweis. Der Operator $\Delta_j\colon \Gamma(E_j) \longrightarrow \Gamma(E_j)$ hat Symbol

$$\sigma(\Delta_j)(\xi) = (\sigma(P_j)(\xi))^*\sigma(P_j)(\xi) + \sigma(P_{j-1})(\xi)(\sigma(P_{j-1})(\xi))^*\colon (E_j)_{\pi(\xi)} \longrightarrow (E_j)_{\pi(\xi)}.$$

Für $v \in \ker\sigma(\Delta_j)(\xi)$ gilt also

$$0 = \langle\sigma(\Delta_j)(\xi)v, v\rangle = |\sigma(P_j)(\xi)v|^2 + |(\sigma(P_{j-1})(\xi))^*v|^2.$$

Das heißt, $v \in \ker(\sigma(P_j)(\xi)) \cap \ker\sigma(P_{j-1})(\xi)^* = 0$. Es folgt, dass Δ_j und deshalb Δ elliptisch sind. Wegen $\sigma(D)(\xi)^2 = \sigma(\Delta)(\xi)$ ist dann auch D elliptisch. $\square$

Schreibe $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_j(E_\bullet, P_\bullet) = \ker\Delta_j$ für den Raum der *harmonischen Schnitte* in $E_\bullet$. Dann gilt sogar $\mathcal{H}_j = \ker D \cap \Gamma(E_j)$, denn für $s \in \ker\Delta_j$ gilt

$$0 = \langle\Delta_j s, s\rangle_{L^2} = \|P_j s\|^2_{L^2} + \|(P_{j-1})^*s\|^2_{L^2}.$$

Satz 8.4 (Hodgezerlegung). *Sei $(E_\bullet, P_\bullet)$ ein elliptischer Komplex. Dann gilt:*

(i) *Es gibt eine L^2–orthogonale Zerlegung $\Gamma(E_j) = \mathcal{H}_j \oplus \operatorname{im}P_{j-1} \oplus \operatorname{im}P^*_j$.*
(ii) *Der Raum $\mathcal{H}_j$ ist endlichdimensional und die Inklusion $(\mathcal{H}_\bullet, 0) \longrightarrow (E_\bullet, P_\bullet)$ induziert einen Isomorphismus $\mathcal{H}_j \xrightarrow{\sim} H^j(E_\bullet, P_\bullet)$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Betrachte den Diracoperator $D\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$. Wegen $D^* = D$ erhalten wir eine orthogonale Zerlegung $\Gamma(E) = \ker(D) \oplus \operatorname{im}(D)$, also eine Zerlegung

$$\Gamma(E_j) = (\ker(D) \cap \Gamma(E_j)) \oplus (\operatorname{im}(D) \cap \Gamma(E_j)) = \mathcal{H}_j \oplus (\operatorname{im}P_{j-1} + \operatorname{im}P^*_j).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{im} P_{j-1} + \operatorname{im} P_j^*$ eine orthogonale direkte Summe ist. Aber für $u \in \Gamma(E_{j-1})$ und $v \in \Gamma(E_{j+1})$ gilt

$$\left\langle P_{j-1}u, P_j^* v\right\rangle_{L^2} = \langle P_j P_{j-1}u, v\rangle = 0.$$

Der Raum $\mathcal{H}_j$ ist endlichdimensional, denn Δ_j definiert einen Fredholmoperator. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{H}_j \longrightarrow H^j(E_\bullet, P_\bullet)$ ein Isomorphismus ist. Dafür genügt es $\ker P_j = \mathcal{H}_j \oplus \operatorname{im} P_{j-1}$ einzusehen. Ist $u \in \ker P_j$ und $v \in \Gamma(E_{j+1})$, so gilt

$$\left\langle u, P_j^* v\right\rangle_{L^2} = \langle P_j u, v\rangle_{L^2} = 0,$$

also $u \in \operatorname{im}(P_j^*)^\perp$. $\square$

Beispiel 8.5 (de Rham–Kohomologie). Für den de Rham–Komplex erhält man die Hodgezerlegung $\Gamma(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}_k \oplus \operatorname{im} d_{k-1} \oplus \operatorname{im} \delta_{k+1}$ und $\mathcal{H}_k \cong H^k(M;\mathbb{R})$. Man kann zeigen, dass $\Delta\star = \pm\star\Delta$, d. h. der Hodgestern induziert einen Isomorphismus $\star\colon \mathcal{H}_k \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{n-k}$. Das liefert eine Variante der klassischen Poincarédualität, nämlich $H^k(M;\mathbb{R}) \cong H^{n-k}(M;\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\Delta\star\omega &= \delta d\star\omega + d\delta\star\omega = \\
&= (-1)^{n(n-k+1)+n+1}\star d\star d\star\omega + (-1)^{n(n-k)+n+1} d\star d\star\star\omega = \\
&= (-1)^{n^2-nk+n+n+1}\star d\star d\star\omega + (-1)^{n^2-nk+n+1}(-1)^{n(n-k)} d\star d\omega = \\
&= (-1)^{nk+n+1}\star d\star d\star\omega + (-1)^{n(k+1)+n+1}\star\star d\star d\omega = \\
&= \star d\delta\omega + \star\delta d\omega = \\
&= \star\Delta\omega
\end{aligned}$$

9 Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung

Sei $P \in \mathrm{PDO}^k(E)$ formal selbstadjungiert und $k > 0$. Elliptische Regularität impliziert, dass P für $\mathrm{dom}(P) = H^k(E)$ einen unbeschränkten selbstadjungierten Operator $L^2(E) \supset \mathrm{dom}(P) \longrightarrow L^2(E)$ definiert. Wir erinnern zunächst an die Spektraltheorie kompakter Operatoren.

Sei H ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum und $K\colon H \longrightarrow H$ selbstadjungiert und kompakt. Dann gilt

(i) $\mathrm{spec}(K) \subset [-\|K\|, \|K\|]$

(ii) $0 \in \mathrm{spec}(K)$ und 0 ist der einzige mögliche Häufungspunkt des Spektrums.

(iii) Alle $\lambda \in \mathrm{spec}(K) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit, d. h. $E_\lambda = \ker(K - \lambda)$ ist nichttrivial und endlichdimensional.

(iv) Es gibt eine orthogonale Zerlegung $H = \ker(K) \oplus \overline{\bigoplus_{\lambda \neq 0} E_\lambda}$.

Satz 9.1. *Sei* $k > 0$ *und* $P \in \mathrm{PDO}^k(E)$ *ein formal selbstadjungierter Differentialoperator auf einem Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit* M *mit* $\dim(M) = n$.

(i) *Es gibt eine orthogonale Zerlegung* $L^2(E) = \overline{\bigoplus_\lambda E_\lambda}$ *wobei* $E_\lambda = \{u \in \Gamma(E)\colon (P - \lambda)u = 0\}$ *endlichdimensional ist. Für* $\mathrm{spec}(P) = \{\lambda\colon E_\lambda \neq 0\}$ *ist* $\mathrm{spec}(P)$ *reell, diskret und unbeschränkt*

(ii) *Sei* $d(\Lambda) = \dim E(\Lambda)$ *wobei* $E_\Lambda = \bigoplus_{|\lambda| \leqslant \Lambda} E_\lambda$. *Dann gibt es eine Konstante* C *mit*

$$d(\Lambda) \leqslant C\Lambda^\gamma$$

für $\gamma = n(n + 2k + 2)/2k$.

Beweis. Betrachte den Greenoperator

$$G = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\colon \mathrm{im}(P) \oplus \mathrm{im}(P)^\perp = L^2(E) \longrightarrow H^k(E) = \ker(P)^\perp \oplus \ker(P)$$

und sei $K = \iota \circ G\colon L^2(E) \longrightarrow L^2$ mit der Soboleveinbettung $\iota\colon H^k(E) \longrightarrow L^2(E)$. Dann ist K nach dem Rellichlemma ein kompakter selbstadjungierter Operator. Die Spektraltheorie kompakter Operatoren liefert dann

$$L^2(E) = \ker(K) \oplus \overline{\bigoplus_{\mu \neq 0} \widetilde{E}_\mu}.$$

Dabei ist $\ker(K) = \mathrm{im}(P)^\perp = \ker(P)$ endlichdimensional. Für $\mu \in \mathrm{spec}(K) \setminus \{0\}$ und $u \in \widetilde{E}_\mu$ gilt $Ku = \mu u$, d. h. $Pu = \mu^{-1}u$. Setze also $E_\lambda = \widetilde{E}_{\lambda^{-1}}$ und $E_0 = \ker(P)$. Wegen der Elliptizität von P ist dann aber $E_\lambda \subset \Gamma(E)$.

Eine Menge $A \subset M$ sei ε*–dicht* wenn $\bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x) = M$. Für $\varepsilon > 0$ setze

$$N(\varepsilon) = \min\{|A| : A \text{ ist } \varepsilon\text{–dicht}\}.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit $N(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{-n}$: Eine Menge $A \subset M$ heiße ε–diskret, wenn $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$ für alle $x \neq y \in A$. Wegen der Dreiecksungleichung ist dann eine eine bezüglich Inklusion maximale $\varepsilon/2$–diskrete Teilmenge bereits ε–dicht. Wegen $\mathrm{vol}(B_\varepsilon(x)) \sim \varepsilon^n$ folgt dann die gewünschte Schranke $N(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{-n}$.

Für $u \in E_\lambda$ gilt $P^\ell u = \lambda^\ell u$. Also ist

$$\|u\|_{H^{k\ell}} \leqslant C(\|u\|_{L^2} + \|P^\ell u\|_{L^2}) \leqslant C(1 + |\lambda|^\ell)\|u\|_{L^2}.$$

Für $u \in E(\Lambda)$ schreibe

$$u = \sum_{|\lambda| \leqslant \Lambda} a_\lambda u_\lambda$$

mit $\|u_\lambda\|_{L^2} = 1$ und $u_\lambda \in E_\lambda$. Dann ist also $P^\ell u = \sum a_\lambda \lambda^\ell u_\lambda$ und deshalb

$$\|P^\ell u\|_{L^2}^2 = \sum_{|\lambda| \leqslant \Lambda} |a_\lambda| |\lambda|^{2\ell} \leqslant \Lambda^{2\ell} \sum_{|\lambda| \leqslant \Lambda} |a_\lambda|^2 = \Lambda^{2\ell} \|u\|_{L^2}^2.$$

Wir erhalten eine Schranke $\|u\|_{H^{k\ell}} \leqslant C(1 + \Lambda^\ell)\|u\|_{L^2}$. Für $k\ell - n/2 > 1$ gibt es eine natürliche stetige Einbettung $H^{k\ell} \hookrightarrow C^1$ und es folgt

$$\|u\|_{C^1} \leqslant C(1 + \Lambda^\ell)\|u\|_{L^2}.$$

Insbesondere gilt dann für einen Zusammenhang ∇ auf E, dass

$$\sup_{x \in M} |\nabla u(x)| \leqslant C(1 + \Lambda^\ell)\|u\|_{L^2} \tag{$*$}$$

für alle $u \in E(\Lambda)$. Angenommen es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit $d(\Lambda) > N(\varepsilon)r$, wobei $r = \mathrm{rk}(E)$. Betrachte für eine ε–dichte Menge $A = \{x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)}\}$ die Auswerteabbildung

$$\mathrm{ev}_A : E(\Lambda) \longrightarrow E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_{N(\varepsilon)}}.$$

Wegen $d(\Lambda) > N(\varepsilon)r$ ist dann aus Dimensionsgründen $\ker(\mathrm{ev}_A) \neq 0$. Es existiert also ein $u \in E_\Lambda$ mit $\|u\|_{L^2} = 1$ und $u(x_1) = \cdots = u(x_{N(\varepsilon)}) = 0$. Aus $(*)$ folgt dann

$$\sup_{x \in M} |u(x)| \leqslant \varepsilon C(1 + \Lambda^\ell)$$

im Widerspruch zu $\|u\|_{L^2} = 1$, falls $\varepsilon C(1 + \Lambda^\ell)\sqrt{\mathrm{vol}(M)} < 1$. Also folgt $d(\Lambda) \leqslant N(\varepsilon_\Lambda)r$ für

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{1}{2C(1 + \Lambda^\ell)\sqrt{\mathrm{vol}(M)}}.$$

Mit $N(\varepsilon_\Lambda) \leqslant C\varepsilon_\Lambda^{-N}$ folgt dann die Existenz einer Konstante $C > 0$ mit $d(\Lambda) \leqslant C\Lambda^{\ell n}$ falls $k\ell - n/2 > 1$, etwa

$$\ell = \frac{n + 2k + 2}{2k}.$$

□

Korollar 9.2. *Für $P \geqslant 0$, d. h. $\langle Pu, u\rangle_{L^2} \geqslant 0$ für alle $u \in \Gamma(E)$, gilt $\mathrm{spec}(P) \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und es existiert eine vollständige Orthonormalbasis u_j von $L^2(E)$, so dass $Pu_j = \lambda_j u_j$ und $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$. Es gilt außerdem*

$$\lambda_j \geqslant C \cdot j^{1/\gamma}$$

mit γ wie in Satz 9.1.

Beweis. Es ist $j = d(\lambda_j) \leqslant C\lambda_j^\gamma$. □

Sei jetzt $k > 0$ und $P \in \mathrm{PDO}^k(E)$ elliptisch mit $P \geqslant 0$. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u_t + Pu_t = 0, \quad t \in (0, \infty)$$

für u_t ein zeitabhängiger glatter Schnitt in E mit der Randbedingung

$$\lim_{t\to 0} u_t = u \in \Gamma(E)$$

für gegebenes u. Formal ist hier $u_t \in \Gamma((0,\infty)\times M, \pi^* E)$ ein Schnitt durch das entlang der Projektion $\pi\colon (0,\infty)\times M \longrightarrow M$ zurückgezogene Bündel. Heuristisch ist eine Lösung gegeben durch $u_t = e^{-tP}u$, denn formal ist dann $\partial_t u_t = -Pu_t$. Unser Ziel wird sein, den Operator e^{-tP} für $t > 0$ als Glättungsoperator mit glattem Kern $k_t(x,y)$ – dem *Wärmeleitungskern* – zu konstruieren, d. h.

$$e^{-tP}u(x) = \int_M k_t(x,y)u(y)\,dy$$

wobei $k \in \Gamma((0,\infty)\times M\times M, (0,\infty)\times(\pi_x^* E \otimes \pi_y^* E^\vee))$ ein Schnitt durch das entsprechend zurückgezogene Bündel ist.

Sei u_j eine vollständige Orthonormalbasis von L^2 wie in Korollar 9.2. Setze

$$k_t(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} u_j(x) \otimes \langle \_, u_j(y)\rangle_{E_y}$$

für $t > 0$. Die Frage ist hier natürlich, ob diese Reihe überhaupt konvergiert.

Lemma 9.3. *Für* $r \geqslant 0$ *und jedes kompate* $I \subset (0,\infty)$ *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} u_j(x) \otimes \langle \_, u_j(y)\rangle_{E_y}$$

in der C^r*–Topologie auf* $I \times M \times M$.

Beweis. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $k\ell > n/2 + r$, d. h. es gibt eine stetige Einbettung $H^{k\ell} \hookrightarrow C^r$. Elliptische Regularität liefert dann

$$\|u_j\|_{C^r} \leqslant C(\|u_j\|_{L^2} + \|P^\ell u_j\|_{L^2}) = C(1+\lambda_j^\ell).$$

Nach Korollar 9.2 gilt $\lambda_j \geqslant Cj^\gamma$ für $\gamma = 2k/n(n+2k+2)$ und es folgt

$$e^{-t\lambda_j}\lambda_j^\ell \leqslant C_1 e^{-tC_2\lambda_j} \leqslant C_1 e^{-tC_3 j^\gamma}$$

und deshalb

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|e^{-t\lambda_j} u_j(x) \otimes \langle \_, u_j(y)\rangle_{E_y}\|_{C^r} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} C_1 e^{-tC_3 j^\gamma} < \infty$$

für $t \in I$. Wegen $\partial_t e^{-t\lambda_j} = -\lambda_j e^{-t\lambda_j}$ liefert ein analoges Argument sogar die Konvergenz der Reihe in $C^r(I\times M\times M)$. □

Korollar 9.4. *Für festes* t *ist* $k_t(x,y)$ *glatt auf* $M \times M$. *Es folgt, dass* e^{-tP} *ein Glättungsoperator ist.*

Lemma 9.5. *Für* $u \in \Gamma(E)$ *setze* $u_t = e^{-tP}u \in \Gamma(E)$. *Dann gilt*

$$\partial_t u_t + Pu_t = 0$$

für alle $t \in (0,\infty)$.

Beweis. Es gilt

$$\partial_t k_t(x,y) = -\sum_j e^{-\lambda_j t}\lambda_j\, u_j(x) \otimes \langle \_, u_j(y)\rangle_{E_y} = -P_x k_t(x,y).$$

Wegen $u_t(x) = \int_M k_t(x,y)u(y)\,dy$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 9.6. Es gilt sogar $\lim_{t\to 0} u_t = u$ bezüglich $\|\_\|_{H^s}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Definition 9.7. Wir schreiben

$$\operatorname{tr} e^{-tP} = \int_M \operatorname{tr} k_t(x,x)dx$$

für $t > 0$.

Bemerkung 9.8. Es gilt

$$\operatorname{tr} e^{-tP} = \sum_j e^{-t\lambda_j},$$

denn $\operatorname{tr}(u_j(x) \otimes \langle \_, u_j(y)\rangle_{E_y}) = |u_j(x)|^2$ und

$$\int_M |u_j(x)|^2\, dx = 1.$$

Sei $P \in \mathrm{PDO}^k(E,F)$ elliptisch mit $k > 0$. Dann sind $P^*P \in \mathrm{PDO}^{2k}(E)$ und $PP^* \in \mathrm{PDO}^{2k}(F)$ positiv. Wegen $\ker(P^*P) = \ker P$ und $\ker(PP^*) = \ker P^* = \operatorname{coker} P$ folgt

$$\operatorname{ind} P = \dim\ker(P^*P) - \dim\ker(PP^*).$$

Satz 9.9 (McKean–Singer–Formel). *Es gilt*

$$\operatorname{ind} P = \operatorname{tr} e^{-tP^*P} - \operatorname{tr} e^{-tPP^*}$$

für alle $t \in (0,\infty)$.

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{tr} e^{-tP^*P} - \operatorname{tr} e^{-tPP^*} = \dim\ker P + \sum_{\lambda_j > 0} e^{-t\lambda_j} - \dim\operatorname{coker} P - \sum_{\mu_j > 0} e^{-t\mu_j}$$

für die Eigenwerte λ_j von P^*P bzw. μ_j von PP^*. Jetzt definiert aber $P\colon E_\lambda \longrightarrow F_\lambda$ einen Isomorphismus für $\lambda > 0$ mit Inversem $\lambda^{-1}P^*$; hier ist E_λ der Eigenraum von P^*P zum Eigenwert λ und F_λ der Eigenraum von PP^*. □

Bemerkung 9.10. Man erhält eine Beweisstrategie für den Atiyah–Singer–Indexsatz. Nämlich kann man den Limes von $\operatorname{tr} e^{-tP^*P} - \operatorname{tr} e^{-tPP^*}$ für $t \to 0$ für Diracoperatoren P berechnen.

10 Diracoperatoren

Sei V ein Vektorraum über einem Körper k von ungerader Charakteristik und $q\colon V \longrightarrow k$ eine quadratische Form. Man erhält eine symmetrische Bilinearform $q(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$.

Definition 10.1. Die *Cliffordalgebra* zu (V,q) ist die universelle assoziative k–Algebra $C\ell(V,q)$ mit 1 zusammen mit einer k–linearen Abbildung $\iota\colon V \longrightarrow C\ell(V,q)$ mit $\iota(v)^2 = -q(v)$, d. h. für jede weitere solche k–Algebra A gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi\colon C\ell(V,q) \longrightarrow A$, so dass

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & C\ell(V,q) \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 10.2.

(i) Aus der Polarisierungsidentität folgt $\iota(v)\iota(w) + \iota(w)\iota(v) = -2q(v,w)$.

(ii) Die Cliffordalgebra zu (V,q) lässt sich als Quotient der Tensoralgebra $T(V)$ nach der Relation $v \otimes v + q(v) = 0$ konstruieren. Diese Relation definiert kein homogenes Ideal in $T(V)$, daher steigt die $\mathbb{Z}$–Graduierung von $T(V)$ nicht auf $C\ell(V,q)$ ab. Man erhält aber eine $\mathbb{Z}/2$–Graduierung auf $C\ell(V,q)$.

(iii) Für $q = 0$ gilt $C\ell(V,q) = \Lambda^\bullet V$.

(iv) Ist V ein euklidischer Vektorraum, so schreiben wir auch $C\ell(V)$ statt $C\ell(V, \|\_\|^2)$. In diesem Fall ist $\Lambda^\bullet V$ ein Modul über $C\ell(V)$ vermöge

$$\iota(v)\eta = v \wedge \eta - v^\flat \llcorner \eta$$

für $v \in V$ und $\eta \in \Lambda^\bullet V$. Wir erhalten durch $\sigma(x) = x \cdot 1$ eine *Symbolabbildung* $\sigma\colon C\ell(V) \longrightarrow \Lambda^\bullet V$

Propositio 10.3. *Die Symbolabbildung* $\sigma\colon C\ell(V) \longrightarrow \Lambda^\bullet V$ *ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist*

$$\dim_{\mathbb{R}} C\ell(V) = 2^n.$$

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann wird $C\ell(V)$ durch

$$\left\{\iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_k})\colon i_1 < \cdots < i_k, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

additiv erzeugt. Es ist also $\dim_{\mathbb{R}} C\ell(V) \leqslant \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Andererseits gilt $\sigma(\iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_k})) = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$. Da die $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ eine Basis von $\Lambda^\bullet V$ bilden, ist σ ein Isomorphismus und $\dim_{\mathbb{R}} C\ell(V) = 2^n$. □

Korollar 10.4. *Die Abbildung* $\iota\colon V \longrightarrow C\ell(V)$ *ist injektiv.*

Korollar 10.5 (Korollar zum Beweis von Propositio 10.3). *Ist* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *eine Orthonormalbasis von* V, *so gelten die Relationen* $e_i^2 = -1$ *und* $e_i e_j + e_j e_i = 0$ *für* $i \neq j$ *in der Cliffordalgebra* $C\ell(V)$. *Die Menge*

$$\left\{e_{i_1} \cdots e_{i_k}\colon i_1 < \cdots < i_k, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

ist eine Basis von $C\ell(V)$.

Bemerkung 10.6. Allgemein ist $\iota\colon V \longrightarrow C\ell(V,q)$ injektiv für jede quadratische Form q. Wir werden im Folgenden V mit $\operatorname{im}\iota \subset C\ell(V,q)$ identifizieren.

Bemerkung 10.7. Die Abbildung $v \longmapsto -v$ auf V setzt sich zu einem involutiven Automorphismus $\alpha\colon C\ell(V,q) \longrightarrow C\ell(V,q)$ fort, d. h. es gilt $\alpha^2 = \mathrm{id}$. Also gibt es die Zerlegung

$$C\ell(V,q) \cong C\ell^0(V,q) \oplus C\ell^1(V,q)$$

in den Eigenraum $C\ell^0(V,q)$ von α zum Eigenwert $+1$ und den Eigenraum $C\ell^1(V,q)$ zum Eigenwert -1. Weiterhin gilt aufgrund der Multiplikativität von α

$$C\ell^i(V,q)\cdot C\ell^j(V,q) \subset C\ell^{i+j}(V,q)$$

für $i,j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Seien $A = A^0 \oplus A^1$ und $B = B^0 \oplus B^1$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–graduierte Algebren. Dann wird $A \widehat{\otimes} B := A \otimes B$ mit der Multiplikation

$$(a_1 \otimes b_1)\cdot(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1|\cdot|b_2|} a_1a_2 \otimes b_1b_2$$

mit der Graduierung

$$(A \widehat{\otimes} B)^0 := A^0 \otimes B^0 \oplus A^1 \otimes B^1 \qquad (A \widehat{\otimes} B)^1 := A^0 \otimes B^1 \oplus A^1 \otimes B^0$$

eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–graduierte Algebra.

Propositio 10.8. *Seien* $V = V_1 \oplus V_2$ *und* $q = q_1 \oplus q_2$, *d. h.* q *ist von der Form* $q(v_1+v_2) = q_1(v_1) + q_2(v_2)$. *Dann ist*

$$C\ell(V,q) \cong C\ell(V_1,q_1) \widehat{\otimes} C\ell(V_2,q_2).$$

Beweis. Betrachte die Abbildung $f\colon V_1 \oplus V_2 \longrightarrow C\ell(V_1,q_1) \widehat{\otimes} C\ell(V_2,q_2)$, die durch $f(v_1+v_2) = v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2$ definiert wird. Es gilt

$$\begin{aligned} f(v)^2 &= (v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2)(v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2) \\ &= -q(v_1)1 \otimes 1 + v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2 - q(v_2)1 \otimes 1 \\ &= -q(v_1) - q(v_2) = -q(v) \end{aligned}$$

für $v = v_1 + v_2 \in V$. Also setzt sich f zu einem $\mathbb{K}$–Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon C\ell(V,q) \longrightarrow C\ell(V_1,q_1) \widehat{\otimes} C\ell(V_2,q_2)$$

fort. Eine Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\psi\colon C\ell(V_1,q_1) \widehat{\otimes} C\ell(V_2,q_2) \longrightarrow C\ell(V,q), \quad x_1 \otimes x_2 \longmapsto x_1 \cdot x_2. \qquad \square$$

Korollar 10.9. *Es ist* $\dim_{\mathbb{K}} C\ell(V,q) = 2^n$ *mit* $n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

Beweis. Zerlege $(V,q) = (V_1,q_1) \oplus \cdots \oplus (V_n,q_n)$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V_i = 1$. Nach Propositio 10.8 ist dann $C\ell(V,q) \cong C\ell(V_1,q_1) \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} C\ell(V_n,q_n)$. Für eine beliebige quadratische Form $Q\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt $C\ell(\mathbb{K},Q) \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$, wenn $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ mit folgender Multiplikation ausgestattet wird:

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - Q(b_1b_2), a_1b_2 + b_1a_2) \qquad \square$$

Korollar 10.10. *Ist* $v_1, \ldots, v_n$ *eine Basis von* V *mit* $q(v_i, v_j) = 0$ *für* $i \neq j$*, dann gilt in der Cliffordalgebra* $v_i^2 = -q(v_i)$ *und* $v_i v_j + v_j v_i = 0$ *für* $i \neq j$ *und*

$$\{v_{i_1} \cdots v_{i_k} : i_1 < \cdots < i_k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$$

ist eine Basis von $C\ell(V, q)$.

Wir schreiben $C\ell_n = C\ell(\mathbb{R}^n, \|\_\|^2)$, $C\ell'_n = C\ell(\mathbb{R}^n, -\|\_\|^2)$ und $\mathbb{C}\ell_n = C\ell(\mathbb{C}^n, \sum_i z_i^2)$. Es ergeben sich folgende Spezialfälle in niedrigen Dimensionen:

	$n = 1$	$n = 2$
$C\ell_n$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
$C\ell'_n$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$

Propositio 10.11. *Es gibt Isomorphismen von* $\mathbb{R}$*–Algebren:*

(i) $C\ell_{n+2} \cong C\ell'_n \otimes_{\mathbb{R}} C\ell_2$
(ii) $C\ell'_{n+2} \cong C\ell_n \otimes_{\mathbb{R}} C\ell'_2$

Beweis. Sei $e_1, \ldots, e_{n+2}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n+2}$. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow C\ell'_n \otimes C\ell_2, \qquad e_1 \longmapsto 1 \otimes e_1,\ e_2 \longmapsto 1 \otimes e_2,\ e_i \longmapsto e_{i-2} \otimes e_1 e_2, \quad i \geqslant 3.$$

Es gilt $f(e_i)^2 = 1 \otimes e_i^2 = -1$ für $i \leqslant 2$ und ebenfalls $f(e_i)^2 = e_{i-2}^2 \otimes e_1 e_2 e_1 e_2 = -1$ für $i \geqslant 3$. Die Abbildung f setzt sich also zu einem Homomorphismus von $\mathbb{R}$–Algebren $\varphi\colon C\ell_n \longrightarrow C\ell'_n \otimes C\ell_2$ fort. Man sieht leicht, dass φ surjektiv ist und aus Dimensionsgründen daher ein Isomorphismus.

Für den zweiten Teil bemerkt man, dass $f\colon \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow C\ell_n \otimes C\ell'_2$ mit der gleichen Definition wie oben wieder einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$–Algebren induziert. Ein zum ersten Teil analoges Argument zeigt, dass es sich bei diesem um einen Isomorphismus handelt. $\square$

Ein reeller Vektorraum mit quadratischer Form (V, q) induziert einen komplexen Vektorraum mit quadratischer Form $(V_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{C}})$ mit der Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ von V und $q_{\mathbb{C}}(v \otimes z) = z^2 q(v)$.

Ist A eine $\mathbb{R}$–Algebra, dann gibt es eine Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit der Multiplikation $(a_1 \otimes z_1)(a_2 \otimes z_2) = a_1 a_2 \otimes z_1 z_2$.

Propositio 10.12. *Es ist* $C\ell(V_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{C}}) \cong C\ell(V, q)_{\mathbb{C}}$ *als* $\mathbb{C}$*–Algebren.*

Beweis. Betrachte die Abbildung $f\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow C\ell(V, q)_{\mathbb{C}}$ definiert durch $v \otimes z \longmapsto v \otimes z$. Dann ist $f(v \otimes z)^2 = v^2 \otimes z^2 = -q(v) z^2 = q_{\mathbb{C}}(v \otimes z)$. Ein zum Beweis von Propositio 10.11 analoges Argument liefert den gewünschten Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 10.13. Es ist $\mathbb{C}\ell_n \cong (C\ell_n)_{\mathbb{C}} \cong (C\ell'_n)_{\mathbb{C}}$.

Korollar 10.14. *Es gilt* $\mathbb{C}\ell_{n+2} \cong \mathbb{C}\ell_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\ell_2 \cong \mathbb{C}\ell_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$.

Satz 10.15. *Wir haben folgende Klassifikation der komplexen Cliffordalgebren:*

(i) *Für* $n = 2k$ *ist* $\mathbb{C}\ell_n \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$.
(ii) *Für* $n = 2k + 1$ *ist* $\mathbb{C}\ell_n \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$.

Definition 10.16. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 2k$ sei $\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$ mit der Darstellung $\kappa_n\colon \mathbb{C}\ell_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$. Für $n = 2k + 1$ sei $\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$, diesmal aber mit der Darstellung

$$\kappa_n\colon \mathbb{C}\ell_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

In beiden Fällen heißt (Δ_n, κ_n) (komplexer) *Spinormodul* von $\mathbb{C}\ell_n$, Elemente in Δ_n heißen (komplexe) *Spinoren.*

Betrachte nun die reelle Cliffordalgebra $C\ell_n$ assoziiert zu $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ liegt dann in $C\ell_n^\times$ mit $v^{-1} = -v/\|v\|^2$.

Definition 10.17. Es sei $\mathrm{Pin}(n) \subset C\ell_n^\times$ die von $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erzeugte Untergruppe. Außerdem sei $\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap C\ell_n^0$ der gerade Anteil von $\mathrm{Pin}(n)$.

Bemerkung 10.18. Die Gruppen $\mathrm{Pin}(n)$ und $\mathrm{Spin}(n)$ sind abgeschlossene Untergruppen von $C\ell_n^\times$ und deswegen Liegruppen.

Sei β die Fortsetzung der Identität $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zu einer Antiinvolution $\beta\colon C\ell_n \longrightarrow C\ell_n$, d. h. es gelte $\beta(xy) = \beta(y)\beta(x)$ und $\beta^2 = \mathrm{id}$.

Lemma 10.19. *Für $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathrm{Pin}(n)$ gilt $xv\beta(x) \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Schreibe $x \in \mathrm{Pin}(n)$ als $x = v_1 \cdots v_k$ mit $v_i \in S^{n-1}$. Dann gilt

$$xv\beta(x) = v_1 \cdots v_k v v_k \cdots v_1.$$

Wir können also annehmen, dass $k = 1$. Wähle eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $e_1 = x$. Dann gilt $v = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i$ und

$$xv\beta(x) = e_1 \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i e_1 = -\langle v, e_1 \rangle e_1 + \sum_{i>1} \langle v, e_i \rangle e_i \in \mathbb{R}^n.$$

Mit anderen Worten, für $x \in S^{n-1}$ ist $v \longmapsto xv\beta(x)$ die Spiegelung an der Hyperebene $x^\perp$. □

Für $x \in \mathrm{Pin}(n)$ sei $\lambda(x)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\lambda(x)(v) = xv\beta(x)$. Dafür gilt dann immer $\lambda(x_1x_2)(v) = x_1x_2v\beta(x_2)\beta(x_1) = \lambda(x_1)(\lambda(x_2)(v))$, d. h. $\lambda\colon \mathrm{Pin}(n) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist ein Homomorphismus.

Bemerkung 10.20. Das Bild $\mathrm{im}(\lambda)$ liegt in $\mathrm{O}(n)$, denn $\lambda(x) = \lambda(v_1) \cdots \lambda(v_k)$ für $x = v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Pin}(n)$ und jedes $\lambda(v_i)$ ist eine Spiegelung an der Hyperebene $v_i^\perp$.

Propositio 10.21. *Es gilt:*

(i) *Der Homomorphismus $\lambda\colon \mathrm{Pin}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n)$ ist surjektiv.*
(ii) *Das Urbild $\lambda^{-1}(\mathrm{SO}(n))$ ist genau $\mathrm{Spin}(n)$.*
(iii) *Der Kern $\ker(\lambda)$ ist genau $\mathbb{Z}^\times \subset \mathrm{Spin}(n)$, man erhält also exakte Sequenzen*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n) \longrightarrow 1$$

und

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1.$$

(iv) *Für $n \geqslant 2$ ist $\mathrm{Spin}(n)$ zusammenhängend.*
(v) *Für $n \geqslant 3$ ist $\mathrm{Spin}(n)$ sogar einfach zusammenhängend und $\lambda\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ ist die universelle Überlagerung.*

Beweis.

(i) Die Surjektivität folgt aus der Tatsache, dass Spiegelungen an Hyperebenen die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ erzeugen.

(ii) Betrachte die Involution $\alpha\colon C\ell_n \longrightarrow C\ell_n$, die $-\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fortsetzt. Dann gilt für $x = v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Pin}(n)$, dass
$$\alpha(x) = \alpha(v_1) \cdots \alpha(v_k) = (-1)^k x$$
und deswegen ist genau dann $x \in \mathrm{Spin}(n)$, wenn k gerade ist. Andererseits gilt $\det \lambda(x) = (-1)^k$, also ist genau dann $\lambda(x) \in \mathrm{SO}(n)$, wenn k gerade ist.

(iii) Angenommen, $\lambda(x) = 1 \in \mathrm{SO}(n)$. Dann gilt $xv\beta(x) = v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathrm{Spin}(n)$. Mit $x = v_1 \cdots v_k$ und $k \in 2\mathbb{Z}$ folgt
$$v_1 \cdots v_k v v_k \cdots v_1 = v$$
für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und deshalb
$$vx = xvv_k \cdots v_1 v_1 \cdots v_k = (-1)^k xv = xv$$
für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Das heißt $x \in C\ell_n^0$ liegt im Zentrum von $C\ell_n$ und im Zentrum von $C\ell_n^0$. Aber $Z(C\ell_n) \cap Z(C\ell_n^0) = \mathbb{R} \cdot 1$ nach Lemma 10.22. Damit folgt $x \in \mathbb{Z}^\times$.

(iv) Betrachte den Pfad $\gamma\colon [0,\pi] \longrightarrow \mathrm{Spin}(n)$ mit $\gamma(t) = -\cos(t) - \sin(t)e_1e_2$. Dann ist $\gamma(0) = -1$ und $\gamma(\pi) = 1$. Da $\mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ eine Überlagerung mit typischer Faser $\mathbb{Z}^\times$ und $\mathrm{SO}(n)$ kompakt ist, folgt daraus, dass $\mathrm{Spin}(n)$ zusammenhängend ist; zumindest wenn $\gamma(t) \in \mathrm{Spin}(n)$ für alle $t \in [0,\pi]$. Aber $\gamma(t) = (\cos(t/2)e_1 + \sin(t/2)e_2)(\cos(t/2)e_1 - \sin(t/2)e_2)$ ist ein Produkt von Vektoren in S^{n-1}.

(v) Wegen $\pi_1 \mathrm{SO}(n) = \mathbb{Z}/2$ für $n \geqslant 3$ und der exakten Sequenz
$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1$$
folgt, dass λ die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ ist. Insbesondere ist dann $\mathrm{Spin}(n)$ einfach zusammenhängend. Für $n = 2$ ist $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$ und $\pi_1 \mathrm{SO}(2) = \mathbb{Z}$. Also ist λ eine nichttriviale zweiblättrige Überlagerung und $\mathrm{Spin}(2) \cong S^1$. □

Lemma 10.22. *Es gilt:*

(i) *Das Zentrum* $Z(C\ell_n)$ *von* $C\ell_n$ *ist*
$$Z(C\ell_n) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1 & n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_1 \cdots e_n & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(ii) *Es ist*
$$Z(C\ell_n^0) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_1 \cdots e_n & n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} \cdot 1 & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Jedes $x \in C\ell_n$ ist von der Form
$$x = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}.$$

Es ist genau dann $x \in Z(C\ell_n)$, wenn $yxy^{-1} = x$ für alle $y \in C\ell_n^\times$. Das Inverse von $e_{j_1} \cdots e_{j_k}$ ist genau $(-1)^\ell e_{j_\ell} \cdots e_{j_1}$ und deshalb ist genau dann $x \in Z(C\ell_n)$, wenn
$$(-1)^\ell e_{j_1} \ldots e_{j_\ell} x e_{j_\ell} \cdots e_{j_1} = x.$$

Es gilt

$$(-1)^{\ell} e_{j_1} \cdots e_{j_\ell} e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_{j_\ell} \cdots e_{j_1} = \pm e_{i_1} \cdots e_{i_k}.$$

Im Fall, dass auf der rechten Seite ein Minus steht, folgt, dass $x_{i_1,\dots,i_k} = 0$. Genauer gilt für $\ell = 2$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$:

$$e_i e_j e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_j e_i = \begin{cases} +1 & i, j \notin I \text{ oder } i, j \in I \\ -1 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Auf diese Weise sieht man, dass $x_{i_1,\dots,i_k} = 0$ ist für $0 < k < n$, d. h. $x \in \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_1 \cdots e_n$. Man kann leicht zeigen, dass genau dann $e_1 \cdots e_n \in Z(C\ell_n)$ ist, wenn n ungerade ist. Das Zentrum von $C\ell_n^0$ berechnet sich analog. □

Wir werden nun versuchen, eine Beschreibung der Liealgebra $\mathfrak{spin}(n)$ zu $\mathrm{Spin}(n)$ zu finden. Ist A eine endlichdimensionale Algebra über $\mathbb{R}$ mit Eins, so wird $A^\times$ zu einer Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{a}^\times = A$, wobei $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$. Wähle eine Norm $\|\_\|$ auf A mit $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$. Dann ist die Exponentialabbildung $\exp\colon A \longrightarrow A^\times$ durch die Exponentialreihe

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

gegeben.

Propositio 10.23. *Es gilt:*

(i) *Es ist* $\mathfrak{spin}(n) = \langle e_i e_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n \rangle \subset C\ell_n$ *mit dem induzierten Kommutator.*

(ii) *Die Exponentialabbildung* $\exp\colon \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Spin}(n)$ *ist durch die Exponentialreihe gegeben.*

(iii) *Ist* $\sigma\colon C\ell_n\colon \mathrm{End}(V)$ *eine Darstellung der Cliffordalgebra, so ist* $\sigma|_{\mathrm{Spin}(n)}\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *eine Darstellung der Spingruppe, deren Differential in* $1 \in \mathrm{Spin}(n)$ *durch*

$$(\sigma|_{\mathrm{Spin}(n)})_* = \sigma|_{\mathfrak{spin}(n)}\colon \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

gegeben ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\langle e_i e_j : i < j \rangle \subset \mathfrak{spin}(n)$. Betrachte für $i < j$ den Pfad $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathrm{Spin}(n)$ mit $\gamma(0) = 1$ und

$$\gamma(t) = \cos(t) + \sin(t) e_i e_j = -(\cos(t/2) e_i + \sin(t/2) e_j)(\cos(t/2) e_i - \sin(t/2) e_j) \in \mathrm{Spin}(n).$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} = e_i e_j.$$

Aber $\dim \langle e_i e_j : i < j \rangle = \binom{n}{2} = \dim \mathfrak{so}(n)$ und es folgt (i). Die Aussagen (ii) und (iii) folgen leicht aus (i). □

Betrachte nun für $n \geqslant 2$ die zweiblättrige Überlagerung $\lambda\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ und ihr Differential $\lambda_*\colon \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$. Eine Basis von $\mathfrak{so}(n)$ ist durch die Matrizen $E_{ij} = (a_{mn})$ mit $a_{ii} = a_{jj} = 0$, $a_{ji} = 1$, $a_{ij} = -1$ und allen restlichen Einträgen 0 gegeben, hier ist immer $i < j$.

Lemma 10.24. *Es gilt* $\lambda_*(e_i e_j) = 2E_{ij}$.

Beweis. Betrachte den Pfad γ aus dem Beweis von Propositio 10.23. Dann gilt

$$\lambda_*(e_i e_j)e_k = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(\gamma(t))e_k = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t)e_k\beta(\gamma(t)).$$

Für $k \neq i, j$ gilt also

$$\lambda_*(e_i e_j)e_k = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\cos(t) + \sin(t)e_i e_j)e_k(\cos(t) + \sin(t)e_i e_j) = 0$$

Für $k = i$ ist

$$\lambda_*(e_i e_j)e_k = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\cos^2(t)e_i - \sin^2(t)e_i + 2\cos(t)\sin(t)e_i e_j e_i) = 2e_j$$

und für $k = j$ gilt analog $\lambda_*(e_i e_j)e_k = -2e_i$. □

KOROLLAR 10.25. *Für* $x \in \mathfrak{spin}(n)$ *und* $v \in \mathbb{R}^n$ *gilt* $\lambda_*(x)v = xv - vx \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es ist $e_i e_j e_k - e_k e_i e_j = 2E_{ij}e_k$. □

11 Die Spindarstellung

Sei (Δ_n, κ_n) der komplexe Spinormodul,d. h. für $n = 2k$ sei κ_n der Isomorphimus $\mathbb{C}\ell_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$ und für ungerade n sei κ_n die Komposition des Isomorphismus $\mathbb{C}\ell_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)^{\oplus 2}$ auf den ersten Faktor.

Definition 11.1. Die Darstellung

$$\kappa_n|_{\mathrm{Spin}(n)} \colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$$

heißt komplexe *Spindarstellung* von $\mathrm{Spin}(n)$.

Bemerkung 11.2. Wegen $\kappa_n(-1) = -1$ steigt κ_n nicht zu einer Darstellung von $\mathrm{SO}(n)$ ab.

Propositio 11.3. *Die Darstellung κ_n ist treu.*

Beweis. Der Fall n gerade ist klar. Sei also $n = 2k + 1$ ungerade. Dann gilt $\Delta_{2k+1} \cong \Delta_{2k}$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\ell_{2k} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\kappa_{2k}"'] & \mathbb{C}\ell_{2k+1} \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k}) \arrow[r, "\Delta"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k+1})^{\oplus 2} \end{tikzcd}$$

ist kommutativ wegen der Klassifikation der komplexen Cliffordalgebren. Durch Einschränkung ergibt sich

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}(2k) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\kappa_{2k}"'] & \mathrm{Spin}(2k+1) \arrow[d, "\kappa_{2k+1}"] \\ \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k}) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k+1}). \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $H \cap \mathrm{Spin}(2k) = 1$ für $H = \ker \kappa_{2k+1}$. Da $\lambda\colon \mathrm{Spin}(2k+1) \longrightarrow \mathrm{SO}(2k+1)$ surjektiv ist, ist dann auch $\lambda(H)$ normal in $\mathrm{SO}(2k+1)$ und $\lambda(H) \cap \mathrm{SO}(2k) = 1$. Sei $A \in \lambda(H)$. Dann hat A eine Achse,d. h. ein $v \neq 0$ mit $Av = v$, und es existiert ein $B \in \mathrm{SO}(2k+1)$ mit $BAB^{-1} \in \mathrm{SO}(2k)$. Aber da $\lambda(H)$ normal ist, folgt $BAB^{-1} \in \lambda(H) \cap \mathrm{SO}(2k)$ und damit $BAB^{-1} = 1$,d. h. $A = 1$. Also ist $\lambda(H) = 1$ und deshalb $H = 1$ oder $H = \mathbb{Z}^{\times}$. Aber $-1 \in \mathrm{Spin}(2k)$ und es gilt sogar $H = 1$. □

Bemerkung 11.4. Wegen $\mathrm{Spin}(n) \subset C\ell_n \subset \mathbb{C}\ell_n$ ist Δ_n gleichzeitig eine Darstellung der Algebra $C\ell_n$ und der Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$.

Propositio 11.5. *Die Operation $C\ell_n \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ ist $\mathrm{Spin}(n)$–äquivariant, wobei $\mathrm{Spin}(n)$ auf $C\ell_n$ durch Konjugation operiert.*

Beweis. Für $x \in C\ell_n$ und $\varphi \in \Delta_n]$ gilt

$$(gxg^{-1})(\kappa_n(g)\varphi) = \kappa_n(gxg^{-1})(\kappa_n(g)\varphi) = \kappa_n(gx)\varphi$$

und

$$\kappa_n(g)(x\varphi) = \kappa_n(g)\kappa_n(x)\varphi = \kappa_n(gx)\varphi.$$ □

Bemerkung 11.6. Die Symbolabbildung $\sigma\colon C\ell_n \xrightarrow{\sim} \Lambda^\bullet\mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{Spin}(n)$–äquivariant, wenn $\mathrm{Spin}(n)$ auf $\Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n)$ durch $\lambda\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ operiert.

Definition 11.7. Es heißt

(i) $\omega = e_1 \cdots e_n \in C\ell_n$ *reelles Volumenelement.*

(ii) $\omega_{\mathbb{C}} = i^{[(n+1)/2]} e_1 \cdots e_n \in \mathbb{C}\ell_n$ *komplexes Volumenelement.*

Bemerkung 11.8.

(i) Es ist $\omega^2 = (-1)^{n(n+1)/2} = (-1)^{[(n+1)/2]}$.

(ii) Es folgt, dass $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$ ist. Ist also n gerade, so ist $\kappa_n(\omega_{\mathbb{C}})$ eine $\mathrm{Spin}(n)$–äquivariante Involution und liefert eine Zerlegung $\Delta_n = \Delta_n^+ \oplus \Delta_n^-$ von Δ_n in Unterdarstellungen.

Definition 11.9. Die Unterdarstellungen $\kappa_{2k}^{\pm}\colon \mathrm{Spin}(2k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k}^{\pm})$ heißen *Halbspindarstellungen.* Elemente von $\Delta_{2k}^{\pm}$ heissen positive bzw. negative *Halbspinoren.*

Bemerkung 11.10. Es gilt $\dim_{\mathbb{C}} \Delta_{2k}^{\pm} = 2^{2k-1}$ und die Cliffordmultiplikation mit Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ ist ungerade bezüglich der Zerlegung $\Delta_{2k} = \Delta_{2k}^+ \oplus \Delta_{2k}^-$, d. h. das Bild von $\mathbb{R}^{2k} \otimes \Delta_{2k}^{\pm} \longrightarrow \Delta_{2k}$ liegt in $\Delta_{2k}^{\mp}$, denn für $\varphi^{\pm} \in \Delta_{2k}^{\pm}$ und $e_i \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\omega_{\mathbb{C}} e_i \varphi^{\pm} = -e_i \omega_{\mathbb{C}} \varphi^{\pm} = \mp e_i \varphi^{\pm}.$$

Propositio 11.11.

(i) *Die Halbspindarstellungen* $\kappa_{2k}^{\pm}\colon \mathrm{Spin}(2k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k}^{\pm})$ *sind beide irreduzibel.*

(ii) *Im ungeraden Fall ist die Spindarstellung* $\kappa_{2k+1}\colon \mathrm{Spin}(2k+1) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k+1})$ *irreduzibel.*

Beweis. Zuerst bemerke man, dass die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraums V einfach ist. Der gerade Anteil $C\ell_n^0 \subset C\ell_n$ ist eine Unteralgebra und die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow C\ell_{n+1}^0$ mit $f(v) = v e_{n+1}$ setzt sich zu einem Isomorphismus $\varphi\colon C\ell_n \xrightarrow{\sim} C\ell_{n+1}^0$ fort: Es gilt

$$v e_{n+1} v e_{n+1} = -\|v\|^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$, woraus überhaupt die Existenz von φ folgt. Weiter gilt

$$\varphi(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = f(e_{i_1}) \cdots f(e_{i_k}) = e_{i_1} e_{n+1} \cdots e_{i_k} e_{n+1} = \begin{cases} \pm e_{i_1} \cdots e_{i_k} & k \text{ gerade} \\ \pm e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_{n+1} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ und es folgt, dass φ ein Isomorphismus ist.

Sei $V \subset \Delta_{2k}^{\pm}$ eine nichttriviale Unterdarstellung. Da $\mathrm{Spin}(2k)$ multiplikativ die Algebra $C\ell_n^0$ erzeugt, erhalten wir eine Darstellung $\varphi\colon C\ell_{2k}^0 \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ von $C\ell_{2k}^0$. Es ist aber $C\ell_{2k}^0 \cong C\ell_{2k-1} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k-1})^2$ und $\dim_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k-1}) = 2^{2k-1}$. Wegen $\dim_{\mathbb{C}}(V) < 2^{2k-1}$ muss dann $\varphi = 0$ sein, im Widerspruch zu $\varphi(1) = 1$. Es folgt, dass die Halbspindarstellungen irreduzibel sind.

Im ungeraden Fall erhält man analog eine Darstellung $C\ell_{2k+1}^0 \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ und wegen den Isomorphismen $C\ell_{2k+1}^0 \cong C\ell_{2k} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2k})$ würde wie oben $\varphi = 0$ folgen. □

Propositio 11.12. *Auf* Δ_n *existiert ein hermitesches Skalarprodukt* $\langle\_,\_\rangle$, *sodass Cliffordmultiplikation mit Vektoren* $v \in \mathbb{R}^n$ *schiefhermitesch ist, d. h.* $\langle v\varphi, \psi\rangle = -\langle \varphi, v\psi\rangle$. *Insbesondere ist dann die Darstellung* $\kappa_n\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta)$ *unitär bezüglich* $\langle\_,\_\rangle$.

Beweis. Betrachte die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{spin}(n) \subset C\ell_n$ mit der üblichen Lieklammer. Der Isomorphismus $\varphi\colon C\ell_n \xrightarrow{\sim} C\ell_{n+1}^0$ mit $\varphi(e_i) = e_i e_{n+1}$ respektiert die Lieklammer und induziert sogar einen Isomorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{spin}(n+1)$, denn es gilt immer $e_i e_{n+1} \in \mathfrak{spin}(n)$ und $\varphi(e_i e_j) = e_i e_{n+1} e_j e_{n+1} = e_i e_j \in \mathfrak{spin}(n+1)$.

Sei nun $\kappa\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Liealgebra. Dann existiert allgemein ein hermitesches Skalarprodukt auf V mit $\langle \kappa(x)v, w\rangle = -\langle v, \kappa(x)w\rangle$, denn sei $\langle \_, \_\rangle_0$ ein beliebiges hermitesches Skalarprodukt auf V und setze

$$\langle v, w\rangle = \int_G \langle gv, gw\rangle \, dg$$

für eine kompakte Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. $\square$

12 Spinstrukturen

Sei $P_{SO(n)}$ ein $SO(n)$–Hauptfaserbündel auf einer Mannigfaltigkeit M; zum Beispiel könnte $P_{SO(n)}$ das Rahmenbündel einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M sein.

Definition 12.1. Eine *Spinstruktur* für $P_{SO(n)}$ ist ein $\mathrm{Spin}(n)$–Hauptfaserbündel $P_{\mathrm{Spin}(n)}$ über M mit einer zweifachen Überlagerung

$$\Lambda\colon P_{\mathrm{Spin}(n)} \longrightarrow P_{SO(n)},$$

sodass

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}(n)} \times \mathrm{Spin}(n) \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda\times\lambda"'] & P_{\mathrm{Spin}(n)} \arrow[d, "\Lambda"] \\ P_{SO(n)} \times SO(n) \arrow[r] & P_{SO(n)} \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}(n)} \arrow[rr, "\Lambda"] \arrow[dr] & & P_{SO(n)} \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Definition 12.2. Zwei Spinstrukturen $(P_{\mathrm{Spin}(n)}, \Lambda)$ und $(P'_{\mathrm{Spin}(n)}, \Lambda')$ für ein gegebenes $SO(n)$–Hauptfaserbündel $P_{SO(n)}$ heißen äquivalent, falls zwischen ihnen ein $\mathrm{Spin}(n)$–äquivarianter Diffeomorphismus $F\colon P_{\mathrm{Spin}(n)} \longrightarrow P'_{\mathrm{Spin}(n)}$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}(n)} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & P'_{\mathrm{Spin}(n)} \arrow[dl, "\Lambda'"] \\ & P_{SO(n)} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 12.3. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann orientierbar, wenn sich die Strukturgruppe von TM von $O(n)$ auf $SO(n)$ reduzieren lässt. Das ist genau dann der Fall, wenn die erste Stiefel–Whitney–Klasse $w_1(M) \in H^1(M, \mathbb{Z}/2)$ verschwindet. Orientierungen entsprechen dann Schnitten durch das Faserbündel $\mathrm{Or}(M) = P_{O(n)} \times_{O(n)} O(n)/SO(n) = P_{O(n)}/SO(n)$.

Definition 12.4. Eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *Spinmannigfaltigkeit*, falls das Rahmenbündel $P_{SO(n)}$ eine Spinstruktur besitzt.

Bemerkung 12.5. Man kann zeigen, dass eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) genau dann eine Spinmannigfaltigkeit ist, wenn die zweite Stiefel–Whitney–Klasse $w_2(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}/2)$ verschwindet. Außerdem entsprechen Spinstrukturen für $P_{SO(n)}$ genau Elementen in $H^1(M, \mathbb{Z}/2)$.

Definition 12.6. Sei (M, g) eine Spinmannigfaltigkeit und sei $\Lambda\colon P_{\mathrm{Spin}(n)} \longrightarrow P_{SO(n)}$ die Spinstruktur von M. Dann heißt das assoziierte Vektorbündel

$$S = P_{\mathrm{Spin}(n)} \times_{(\mathrm{Spin}(n), \kappa_n)} \Delta_n$$

(komplexes) *Spinorbündel* auf M.

Bemerkung 12.7. Das Spinorbündel S trägt eine Cliffordmodulstruktur

$$C\ell(M) \otimes S \longrightarrow S,$$

wobei $C\ell(M) = P_{\mathrm{Spin}(n)} \times_{\mathrm{Spin}(n)} C\ell_n$ das *Cliffordbündel* auf M ist.

Außerdem trägt S eine hermitesche Metrik h, sodass Cliffordmultiplikation mit $v \in TM$ schiefhermitesch ist, d. h. es gilt

$$h(v\varphi, \psi) = -h(\varphi, v\psi)$$

für $v \in T_pM$ und $\varphi, \psi \in S_p$.

Propositio 12.8. *Sei $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ ein Zusammenhang auf einem G–Hauptfaserbündel mit Krümmung $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{bas}}(P, \mathfrak{g})$. Dann gilt*

(i) *die Strukturgleichung $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$, wobei $[\cdot \wedge \cdot]$ das von der Lieklammer von $\mathfrak{g}$ induzierte Dachprodukt bezeichne.*

(ii) *die Bianchiidentität $D\omega = 0$, wobei D das kovariante äußere Differential bezeichne.*

(iii) *für jede Darstellung (V, ρ) von G und jedes $\eta \in \Omega^k_{\mathrm{bas}}(P, V)$ die Gleichung $D^2\eta = \rho_*(\Omega) \wedge \eta = F^\nabla \wedge \eta$ mit der Krümmungsform F^∇ von $F = P \times_{(G,\rho)} V$.*

Lemma 12.9. *Seien Ω, ρ wie in Propositio 12.8 und $\eta \in \Omega^k_{\mathrm{bas}}(P, V)$. Dann gilt $D\eta = d\eta + \rho_*(\Omega) \wedge \eta$.*

Beweis. Überprüfe die Aussage auf horizontalen und vertikalen Vektoren. Seien also zuerst $v_0, \dots, v_k$ horizontal. Dann ist $(D\eta)(v_0, \dots, v_k) = (d\eta)(v_0, \dots, v_k)$ und $(\rho_*(\omega) \wedge \eta)(v_0, \dots, v_k) = 0$, weil $\rho_*(\omega)(v_i) = 0$. Sind dagegen mindestens zwei v_i vertikal, dann ist $(D\eta)(v_0, \dots, v_k) = 0$, da $D\eta \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{bas}}(P, V)$. Außerdem ist dann $(\rho_*(\omega) \wedge \eta)(v_0, \dots, v_k) = 0$, weil $\eta \in \Omega^k_{\mathrm{bas}}(P, V)$. Es bleibt zu zeigen, dass $(d\eta)(v_0, \dots, v_k)$ verschwindet. Setze dafür die vertikalen Vektoren v_{i_1}, v_{i_2} auf fundamentale Vektorfelder X_{i_1}, X_{i_2} fort, und alle anderen v_i beliebig auf Vektorfelder X_i. Dann gilt

$$d\eta(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\eta(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k) = 0,$$

da $[X_{i_1}, X_{i_2}]$ vertikal ist.

Sei nun genau ein v_i vertikal und alle anderen horizontal. Ohne Einschränkung sei dies v_0. Wie oben setze v_0 auf das fundamentale Vektorfeld $X_0 = X_{\rho_0}$ und $v_1, \dots, v_k$ auf Vektorfelder X_i fort. Dann ist $(D\eta)(v_0, \dots, v_k) = 0$ und

$$(\rho_*\omega \wedge \eta)(v_0, \dots, v_k) = \rho_*\omega(v_0)\eta(v_1, \dots, v_k) = \rho_*(\rho_0)\eta(v_1, \dots, v_k).$$

Nach Cartans Formel ist

$$\begin{aligned}
(d\eta)(v_0, \dots, v_k) &= X_{\rho_0}\eta(X_1^{\mathrm{hor}}, \dots, X_k^{\mathrm{hor}}) + \sum_{i=1}^{k} \eta([X_{\rho_0}, X_i^{\mathrm{hor}}], X_1^{\mathrm{hor}}, \dots, \widehat{X_i^{\mathrm{hor}}}, \dots, X_k^{\mathrm{hor}}) = \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(X_1^{\mathrm{hor}}(p\exp(t\rho_0)), \dots, X_k^{\mathrm{hor}}(p\exp(t\rho_0))) = \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(dR_{\exp(t\rho_0)}X_1^{\mathrm{hor}}(p), \dots, dR_{\exp(t\rho_0)}X_k^{\mathrm{hor}}(p)) = \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R^*_{\exp(t\rho_0)}\eta(v_1, \dots, v_k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(-t\rho_0))\eta(v_1, \dots, v_k) = \\
&= -\rho_*(\rho_0)\eta(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

□

Beweis von Propositio 12.8(iii). Man berechnet

$$\begin{aligned}
D^2\eta = D(D\eta) = D(d\eta + \rho_*(\omega) \wedge \eta) &= d^2\eta + d(\rho_*(\omega) \wedge \eta) + \rho_*(\omega) \wedge d\eta + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega) \wedge \eta = \\
&= d\rho_*(\omega) \wedge \eta - \rho_*(\omega) \wedge d\eta = (\rho_*(d\omega) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)) \wedge \eta.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\rho_*(\omega)\wedge\rho_*(\omega)(v,w) &= \rho_*(\omega)(v)\rho_*(\omega)(w)-\rho_*(\omega)(w)\rho_*(\omega)(v) = \\ &= [\rho_*(\omega)(v),\rho_*(\omega)(w)] = \rho_*[\omega(v),\omega(w)]_{\mathfrak{g}} = \\ &= \frac{1}{2}\rho_*[\omega\wedge\omega](v,w)\end{aligned}$$

□

Sei jetzt (M^n, g) eine Riemannsche Spinmannigfaltigkeit und $\Lambda\colon P_{\mathrm{Spin}(n)} \longrightarrow P_{\mathrm{SO}(n)}$ eine Spinstruktur. Dann haben wir

(i) durch den Levi–Civita–Zusammenhang auf TM einen Zusammenhang auf $P_{\mathrm{SO}(n)}$, repräsentiert durch $\omega \in \Omega^1(P_{\mathrm{SO}(n)}, \mathfrak{so}(n))$.
Dieser lässt sich geometrisch wie folgt beschreiben: Sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x$. Der Paralleltransport $\tau_{\gamma(t)}\colon T_xM \longrightarrow T_{\gamma(t)}M$ bildet v auf $X_{\gamma(t)}$ ab, wobei X das eindeutige Vektorfeld entlang γ mit $X(0) = v$ und $\nabla_{\dot\gamma}X = 0$ ist. Daraus erhalten wir einen Paralleltransport in $P_{\mathrm{SO}(n)}$ wie folgt: Sei $e_1,\dots,e_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis in x, und $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow P_{\mathrm{SO}(n)}$ definiert durch $\widetilde{\gamma}(t) = (\tau_{\gamma(t)}e_1,\dots,\tau_{\gamma(t)}e_n)$. Ist dann $v = \gamma'(0)$, dann definiere $v^{\mathrm{hor}} = \widetilde{\gamma}'(0)$.
Für eine lokale Betrachtung sei $U \subset M$ offen und $\sigma\colon U \longrightarrow P_{\mathrm{SO}(n)}|_U$ ein lokaler Schnitt. Für einen Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P_{\mathrm{SO}(n)}, \mathfrak{so}(n))$ betrachte $\sigma^*\omega = \sum_{i<j}\omega_{ij}E_{ij} \in \Omega^1(U, \mathfrak{so}(n))$ für $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$ und die Basis $E_{ij} = (\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl})_{kl}$ von $\mathfrak{so}(n)$. Genauso zerlegt sich die Krümmung Ω zu $\sigma^*\Omega = \sum_{i<j}\Omega_{ij}E_{ij} \in \Omega^2(U, \mathfrak{so}(n))$ mit $\Omega_{ij} \in \Omega^1(U)$.
Nach Lemma 12.9 ist $\omega_{ij} = g(\nabla\_e_i, e_j)$, was die Christoffel–Symbole sind. Nach Propositio 12.8 ist $\Omega_{ij}(X,Y) = g(R(X,Y)e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}e^k \wedge e^l$ mit dem Riemannschen Krümmungstensor $R \in \Omega^2(M, \mathfrak{so}(TM))$.

(ii) Es existiert genau ein $\widetilde{\omega} \in \Omega^1(P_{\mathrm{Spin}(n)}, \mathfrak{spin}(n))$ so dass

$$\begin{tikzcd} TP_{\mathrm{Spin}(n)} \arrow[r, dashed, "\widetilde{\omega}"] \arrow[d, "d\Lambda"] & \mathfrak{spin}(n) \arrow[d, "\lambda_*", "\cong"'] \\ TP_{\mathrm{SO}(n)} \arrow[r, "\omega"] & \mathfrak{so}(n) \end{tikzcd}$$

(iii) Sei $S = P_{\mathrm{Spin}(n)} \times_{(\mathrm{Spin}(n),\kappa_n)} \Delta_n$ mit der Spindarstellung $\kappa_n\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\Delta_n$. Dann induziert $\widetilde{\omega}$ eine äußere kovariante Ableitung

$$D\colon \Omega^k(M,S) \cong \Omega^k_{\mathrm{bas}}(P_{\mathrm{Spin}(n)}, \Delta_n) \longrightarrow \Omega^{k+1}_{\mathrm{bas}}(P_{\mathrm{Spin}(n)}, \Delta_n) \cong \Omega^{k+1}(M,S)$$

Wir definieren den *spinoriellen Levi–Civita–Zusammenhang* durch

$$\nabla := D|_{\Omega^0(M,S)=\Gamma(M,S)}.$$

Lokal sei $\widetilde{\sigma}\colon U \longrightarrow P_{\mathrm{Spin}(n)}|_U$ ein Lift von $\sigma\colon U \longrightarrow P_{\mathrm{SO}(n)}|_U$. Dann ist $\widetilde{\sigma}^*\widetilde{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}e_i \cdot e_j$. Vermöge $\widetilde{\sigma}$ ist $\varphi \in \Gamma(M,S)$ identifiziert mit $\varphi \in C^\infty(U, \Delta_n)$ und es gilt

$$\Omega^1(U, S|_U) \ni \nabla\varphi \mathrel{\widehat{=}} d\varphi + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}e_i \cdot e_j \cdot \varphi \in \Omega^1(U, \Delta_n),$$

wobei e_i die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist. Analog erhält man für die Krümmung

$$(\widetilde{\sigma}^*\widetilde{\Omega})(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} g(R(X,Y)e_i, e_j)e_i \cdot e_j.$$

Also gibt es die Korrespondenz

$$\Gamma(U, S|_U) \ni R(X,Y)\varphi \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{2}\sum_{i<j} g(R(X,Y)e_i, e_j)e_i \cdot e_j \cdot \varphi \in C^\infty(U, \Delta_n).$$

Lemma 12.10. *Es gilt für alle Vektorfelder* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *und Spinorfelder* $\varphi, \psi \in \Gamma(S)$*:*
(i) $X\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\nabla_X\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi,\nabla_X\psi\rangle$.
(ii) $\nabla_X(Y\varphi) = \nabla_X Y \cdot \varphi + Y \cdot \nabla_X\varphi$.

Beweis. Die erste Eigenschaft folgt aus der Unitarität der Spindarstellung $\kappa_n\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\,\Delta_n$. Jedes Spinorfeld $\varphi \in \Gamma(S)$ lässt sich mit einer $\mathrm{Spin}(n)$–äquivarianten Abbildung $f^\varphi\colon P_{\mathrm{Spin}(n)} \longrightarrow \Delta_n$ identifizeren und dann gilt

$$X^{\mathrm{hor}}\left\langle f^\varphi, f^\psi\right\rangle = \left\langle X^{\mathrm{hor}} f^\varphi, f^\psi\right\rangle + \left\langle f^\varphi, X^{\mathrm{hor}} f^\psi\right\rangle,$$

was entlang unserer Identifizierung (i) entspricht. Die zweite Eigenschaft folgt aus der $\mathrm{Spin}(n)$–Äquivarianz der Cliffordmultiplikation $\mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ und aus der Identifizierung $TM = P_{\mathrm{Spin}(n)} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{R}^n$ entlang der Überlagerung $\mathrm{Spin}(n) \longrightarrow SO(n)$. □

13 Diracbündel

Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit zusammen mit einem komplexen Vektorbündel $\pi\colon E \longrightarrow M$, das mit einer hermiteschen Metrik h und einem unitären Zusammenhang ∇ ausgestattet sei. Außerdem sei eine Cliffordmodulstruktur $c\colon C\ell(M) \otimes E \longrightarrow E$ auf E gegeben.

Definition 13.1. Das Bündel E heißt *Diracbündel*, falls

(i) die Cliffordmultiplikation schiefsymmetrisch ist:

$$h(X \cdot \sigma, \tau) = -h(\sigma, X \cdot \tau).$$

(ii) die Cliffordmultiplikation parallel ist:

$$\nabla_X(Y \cdot \sigma) = \nabla_X Y \cdot \sigma + Y \cdot \nabla_X \sigma.$$

Bemerkung 13.2. Aus (i) folgt $h(X \cdot \sigma, X \cdot \tau) = -h(\sigma, X \cdot X \cdot \tau) = \|X\|^2 h(\sigma, \tau)$. Also ist die Cliffordmultiplikation mit Einheitsvektorfeldern unitär. Aus (ii) folgt auch

$$\nabla_X(\eta\sigma) = \nabla_X \sigma + \eta \cdot \nabla_X \sigma$$

für alle Schnitte $\eta \in \Gamma(C\ell(M))$.

Bemerkung 13.3.

(i) Ist (M, g) eine Spinmannigfaltigkeit, so ist das Spinorbündel S ein Diracbündel.

(ii) Die Komplexifizierung $\Lambda T^\vee M \otimes \mathbb{C}$ des Formenbündels auf M ist ein Diracbündel; die Cliffordmultiplikation lautet

$$c(X)\eta = \varepsilon(X^\flat)\eta + \llcorner(X)\eta.$$

Definition 13.4. Sei E ein Diracbündel auf (M, g). Dann heißt

$$D\colon \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^\vee M \otimes E) \xrightarrow{(\_)^\sharp} \Gamma(TM \otimes E) \xrightarrow{c} \Gamma(E)$$

assoziierter *Diracoperator* auf E.

Bemerkung 13.5. Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine lokale Orthonormalbasis, so gilt

$$D\sigma = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} \sigma.$$

Damit folgt

$$D(f\sigma) = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i}(f\sigma) = (\nabla f) \cdot \sigma + f \cdot D\sigma$$

für $f \in C^\infty(M)$.

Lemma 13.6. *Der Diracoperator* $D \in \mathrm{PDO}^1(E)$ *ist elliptisch mit Hauptsymbol*

$$\sigma_x(D)\xi = i\xi^\sharp \cdot \_\colon E_x \longrightarrow E_x.$$

Beweis. Es ist $\mathrm{ad}(f)D = -\nabla f \cdot \_$. Für $\xi \neq 0$ folgt dann, dass

$$(\sigma(D)\xi)^2 = -\xi^\sharp \cdot \xi^\sharp = \|\xi\|^2$$

invertierbar ist, d. h. dass D elliptisch ist. □

Lemma 13.7. *Der Diracoperator* D *ist formal selbstadjungiert.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} h(D\sigma,\tau) &= -\sum_i h(\nabla_{e_i}\sigma, e_i\cdot\tau) = e_i h(\sigma, e_i\cdot\tau) - h(\sigma, \nabla_{e_i}(e_i\cdot\tau)) = \\ &= \operatorname{div}(h(\sigma,(\_)\cdot\tau)) + h(\sigma, D\tau). \end{aligned}$$

Aus dem Divergenzsatz folgt dann

$$\int_M h(D\sigma,\tau)\,\mathrm{dvol} = \int_M h(\sigma, D\tau)\,\mathrm{dvol}\,. \qquad \square$$

Korollar 13.8. *Der Index* $\operatorname{ind}(D)$ *von* D *ist* 0.

Bemerkung 13.9.
(i) Für das Spinorbündel $E = S$ ist der Diracoperator D genau der *Atiyah–Singer–Operator.*
(ii) Für $E = \Lambda T^{\vee}M$ ist $D = d + d^*$ der *Hodge–Dirac–Operator.*

Definition 13.10. Das Diracbündel E ist $\mathbb{Z}/2$–graduiert: Es gibt die Zerlegung $E = E^+ \oplus E^-$ in parallelen und orthogonalen Anteil und die Cliffordmultiplikation mit Vektoren ist per definitionem *ungerade.*

Bemerkung 13.11. Entlang dieser $\mathbb{Z}/2$–Graduierung gilt

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} : \Gamma(E^+) \oplus \Gamma(E^-) \longrightarrow \Gamma(E^+) \oplus \Gamma(E^-);$$

also ist der Diracoperator ungerade und es folgt $(D^+)^* = D^-$ und $\operatorname{ind}(D^+) = -\operatorname{ind}(D^-)$. Außerdem ist $\operatorname{ind}(D^+) = \dim\ker(D^+) - \dim\ker(D^-)$, gewissermaßen die *Superdimension* des Kerns von D.

Für gerade Dimension $n = \dim(M)$ ist E kanonisch durch das Volumenelement $\omega_{\mathbb{C}}$ graduiert; es ist E^+ der Eigenraum von $c(\omega_{\mathbb{C}})$ zu $+1$ und E^- der Eigenraum zu -1.

Propositio 13.12 (Weitzenböckformel). *Es gilt* $D^2 = \nabla^*\nabla + c(F^{\nabla})$.

Beweis. Man berechnet in einem synchronen Rahmen

$$\begin{aligned} D^2\sigma &= \sum_{i,j} e_i\cdot\nabla_{e_i}(e_j\nabla_{e_j}\sigma) = \sum_{i,j} e_i\cdot e_j\cdot\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\sigma \\ &= -\sum_i \nabla^2_{e_i}\sigma + \sum_{i<j} e_ie_j(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i})\sigma = \\ &= (\nabla^*\nabla)\sigma + c(F^{\nabla})\cdot\sigma. \end{aligned} \qquad \square$$

Im Fall $E = S$ lässt sich zeigen, dass $c(F^{\nabla}) = \frac{1}{4}\,\mathrm{scal}$ ist und aus der Weitzenböckformel folgt dann

$$D^2_{\mathrm{AS}} = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\,\mathrm{scal}\,.$$

Als Anwendung ergibt sich, dass auf einer kompakten Spinmannigfaltigkeit mit echt positiver Skalarkrümmung immer der Kern $\ker D_{\mathrm{AS}}$ des Atiyah–Singer–Operators verschwindet, denn für $\varphi \in \ker D_{\mathrm{AS}}$ gilt

$$0 = \int_M \left\langle D^2_{\mathrm{AS}}\varphi, \varphi\right\rangle \mathrm{dvol} = \int_M |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{4}\int_M \mathrm{scal}\cdot\|\varphi\|^2\,\mathrm{dvol}\,.$$

14 Ausblick zu Indexsätzen

Wir besprechen zuerst einen differentialgeometrischen Zugang zur Theorie der charakteristischen Klassen, nämlich die *Chern–Weil Theorie.* Sei $\pi\colon P \longrightarrow M$ ein G–Hauptfaserbündel mit einem Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$. Man erhält die Krümmungsform $\Omega \in \Omega^2_{\text{bas}}(P;\mathfrak{g}) = \Omega^2(M, P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$. Sei $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^\vee]$ der Ring der komplexen Polynomfunktionen auf $\mathfrak{g}$, d. h. $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^\vee] = \mathrm{Sym}^\bullet_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}^\vee$. Ein $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^\vee]$ heiße *Ad–invariant*, wenn $f(\mathrm{Ad}(g)a) = f(a)$ für alle $g \in G$ und $a \in \mathfrak{g}$. Schreibe $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^\vee]^G$ für den Ring der Ad–invarianten Polynomfunktionen.

Sei jetzt $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^\vee]^G_k$. Dann ist $f(\Omega)$ wohldefiniert: Schreibt man die Krümmung $\Omega = \sum_i \Omega_i \otimes a_i$ und die Funktion $f = \sum_{|I|=k} f_I (a^\vee_\bullet)^I$ bezüglich einer Basis $a_1, \ldots, a_n$ von $\mathfrak{g}$, ist

$$f(\Omega) = \sum_{|I|=k} f_I \Omega_\bullet^{\wedge I} \in \Omega^{2k}_{\text{bas}}(P;\mathbb{C}) = \Omega^{2k}(M;\mathbb{C}).$$

Satz 14.1 (Chern–Weil Theorie). *Mit den Notationen von oben gilt:*

(i) *Es gilt* $d(f(\Omega)) = 0$.

(ii) *Die Kohomologieklasse* $f(P) = [f(\Omega)] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$ *hängt nicht vom Zusammenhang* ω *ab.*

Man erhält einen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^\vee]^G \longrightarrow H^{2\bullet}_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$, *den* Chern–Weil Homomorphismus. *Da die de Rham–Kohomologie in Graden oberhalb der Dimension von* M *verschwindet, dehnt sich dieser Homomorphismus sogar zu einem Homomorphismus* $\mathbb{C}[\![\mathfrak{g}^\vee]\!]^G \longrightarrow H^{2\bullet}_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$ *aus.*

Beispiel 14.2.

(i) Sei $G = GL_r(\mathbb{C}) \supset U(r)$. Zugehörige Hauptfaserbündel sind dann genau komplexe Vektorbündel. Definiere
$$c(a) = \det(\mathrm{id} - a/2\pi i) = 1 + c_1(a) + c_2(a) + \cdots + c_r(a) \in \mathbb{C}[\![\mathfrak{g}^\vee]\!]^G.$$
Dann ist $c(P) \in H^{2\bullet}_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{R}) \subset H^{2\bullet}_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$ die totale *Chernklasse* des komplexen Vektorbündels $P \longrightarrow M$.

(ii) Die charakteristische Klasse zu
$$\mathrm{ch}(a) = \mathrm{tr}\exp(-a/2\pi i) \in \mathbb{C}[\![\mathfrak{g}^\vee]\!]^G$$
ist der *Cherncharakter.*

(iii) Die Klasse zu
$$p(a) = \det(\mathrm{id} - a/2\pi) \in \mathbb{R}[\![\mathfrak{g}^\vee]\!]^G \subset \mathbb{C}[\![\mathfrak{g}^\vee]\!]^G$$
ist die totale *Pontryaginklasse* $p(P) \in H^{4\bullet}(M;\mathbb{R})$.

(iv) Für $G = SO(r)$ mit $r \in 2\mathbb{Z}$ gibt es das *Pfaffsche Polynom* $\mathrm{Pf} \in \mathbb{R}[\![\mathfrak{so}(r)^\vee]\!]^{SO(r)}$ mit $(\mathrm{Pf}(a))^2 = \det(a)$. Die zugehörige Klasse ist die *Eulerklasse* $e(P)$.

(v) Sei $f(z)$ holomorph um $z = 0$ und $\Pi_f(a) = \det f(-a/2\pi i) \in \mathbb{C}[\![\mathfrak{g}^\vee]\!]^G$. Die zugehörige Klasse $\Pi_f(P) \in H^{2\bullet}(M;\mathbb{C})$ heißt *Chern* f*–Geschlecht.* Im reellen Fall sei $f(z)$ der Zweig von $\sqrt{g(z^2)}$ mit $f(0) = 1$ für eine um $z = 0$ holomorphe Funktion $g(z)$ mit $g(0) = 1$. Das zugehörige Geschlect heißt dann *Pontryagin* g*–Geschlecht.*

(vi) Das komplexe Geschlecht zu $f(z) = z/(\exp(z) - 1)$ heißt *Toddgeschlecht* $\mathrm{Td}(P)$. Das Pontryagingeschlecht zu
$$g(z) = \frac{\sqrt{z}/2}{\sinh(\sqrt{z}/2)}$$

heißt $\widehat{A}$–*Geschlecht* $\widehat{A}(P)$; das Pontryagingeschlecht zu

$$g(z) = \frac{\sqrt{z}}{\tanh(\sqrt{z})}$$

heißt L–*Geschlecht* $L(P)$.

Sei jetzt (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\pi \colon E^{\pm} \longrightarrow M$ eine Diracbündel mit Diracoperator D.

Satz 14.3 (Atiyah–Singer für Diracoperatoren). *Es gilt*

$$\operatorname{ind}(D^{+}) = \left\langle \widehat{A}(TM) \cup \operatorname{ch}_{\mathbb{Z}/2}(E/S), [M] \right\rangle = \int_M \widehat{A}(TM) \wedge \operatorname{ch}_{\mathbb{Z}/2}(E/S),$$

wobei $\operatorname{ch}_{\mathbb{Z}/2}(E/S)$ *der* relative (Super–)Cherncharakter *ist. Für dessen Definition geht man zum lokalen Fall über: für eine Spinmannigfaltigkeit* M *und* $E^{\pm} = S^{\pm} \otimes W^{\pm}$ *mit dem komplexen Spinorbündel* $S^{\pm}$ *ist*

$$\operatorname{ch}_{\mathbb{Z}/2}(E/S) = \operatorname{ch}(W^{+}) - \operatorname{ch}(W^{-}).$$

Beispiel 14.4.

(i) Sei (M, g) eine Spinmannigfaltigkeit und $E^{\pm} = S^{\pm}$ das komplexe Spinorbündel mit dem Atiyah–Singer–Diracoperator D. Der Indexsatz liefert dann

$$\operatorname{ind}(D_{+}) = \left\langle \widehat{A}(TM), [M] \right\rangle \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere folgt aus $\left\langle \widehat{A}(TM), [M] \right\rangle \neq 0$ auf einer Spinmannigfaltigkeit, dass es auf M keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung geben kann.

(ii) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E = \Lambda T^{\vee}M \otimes \mathbb{C}$. Dann ist der zugehörige Diracoperator $D = d + d^{*}$. Wählt man auf E die übliche Graduierung von Differentialformen, erhält man den Satz von Gauss–Bonnet–Chern:

$$\chi(M) = \operatorname{ind}(D^{+}) = \langle e(TM), [M] \rangle = \int_M \operatorname{Pf}(R).$$

Wählt man auf E die Graduierung durch die Operation des Volumenelements $\omega_{\mathbb{C}}$, das auf dem Formenbündel $\Lambda T^{\vee}M \otimes \mathbb{C}$ durch $i^{m+p(p-1)}\star$ auf p–Formen operatiert. Für $\dim(M) \in 4\mathbb{Z}$, etwa $\dim(M) = 2m$, hat man dann die Schnittform

$$H^{m}(M;\mathbb{R}) \otimes H^{m}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\cup} H^{2m}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\langle \_, [M] \rangle} \mathbb{R},$$

eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Ihre Signatur ist die *Signatur* $\operatorname{sign}(M)$ von M. Der Index von $d + d^{*}$ bezüglich dieser Graduierung ist dann genau $\operatorname{sign}(M)$. Der Indexsatz liefert dann den Signatursatz von Hirzebruch

$$\operatorname{sign}(M) = \operatorname{ind}(D_{+}) = \langle L(TM), [M] \rangle \,.$$

(iii) Eine komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, J, g) heißt *Kähler*, wenn $\nabla J = 0$. Man erhält dann eine Zerlegung $\Lambda^{k} T^{\vee}M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{p,q} T^{\vee}M$. Sei $E = \bigoplus_q \Lambda^{0,q} T^{\vee}M$ mit dem *Dolbeaultoperator* $\overline{\partial}$. Es stellt sich heraus, dass E ein Cliffordmodul durch

$$(v^{1,0} \oplus v^{0,1}) \cdot \eta = \sqrt{2}((v^{1,0})^{\flat} \wedge \eta + v^{0,1} \llcorner \eta)$$

wird; tatsächlich wird E so sogar zu einem Diracbündel. Man kann zeigen, dass für eine Kählermannigfaltigkeit (M, J, g) der Diracoperator auf E durch $D = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ gegeben ist. Sei zusätzlich ein holomorphes Bündel W mit einer hermiteschen Metrik und einem unitären Zusammenhang gegeben. Man erhält aus dem Indexsatz bezüglich der üblichen Graduierung den Satz von Hirzebruch–Riemann–Roch

$$\sum_q (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} H^{0,q}(W) = \operatorname{ind}(D^+) = \left\langle \mathrm{Td}(TM^{1,0}) \cup \mathrm{ch}(W), [M] \right\rangle .$$