**Vorlesung aus dem Sommersemester 2012**

# Funktionentheorie

Priv.-Doz. Dr. Edgardo Stockmeyer

geTEXt von Viktor Kleen & Florian Stecker

## Inhaltsverzeichnis

# 0 Einführung

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit Funktionen $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ oder allgemeiner $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ beschäftigen. Es wird fast alles wie in der reellen Analysis funktionieren, bis auf die Annahme, dass $f$ *komplex differenzierbar* sein wird. Diese Annahme wird viele neue Eigenschaften bewirken. Grob gesagt wird eine Funktion $f$ in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar heißen, wenn der Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert, wobei $h$ die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ durchläuft. Dieser Differenzierbarkeitsbegriff ist sehr viel restriktiver als der der Differenzierbarkeit im Sinne der reellen Analysis, sowohl der partiellen Differenzierbarkeit als auch der totalen Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Der Unterschied zur totalen Differenzierbarkeit liegt darin begründet, dass der reell-analytische Begriff die Approximation von $f$ durch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, der komplex-analytische die Approximation von $f$ durch eine $\mathbb{C}$-linear Abbildung erreicht. Es gibt viele Funktionen, die diese restriktivere Bedingung erfüllen, zum Beispiel sind $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\exp(z)$, Polynome und Potenzreihenfunktionen komplex differenzierbar.

Komplex differenzierbare Funktionen haben viele Eigenschaften, die aus der reellen Analysis nicht bekannt sind. Zum Beispiel ist eine Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn sie beliebig oft komplex differenzierbar ist. Jede solche Funktion ist *analytisch*, d.h. ihre Taylorreihe konvergiert lokal gegen $f$. Kurvenintegrale von komplex differenzierbaren Funktionen entlang geschlossener Kurven auf "schönen" Mengen sind immer 0. Neben diesen gibt es noch viele weitere Eigenschaften, die komplex differenzierbare Funktionen besitzen.

# 1 Komplexe Zahlen

## 1.1 $\mathbb{C}$ als algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wurden zuerst definiert um eine "interessante" Zahlmenge zu finden, in der Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ lösbar sind.

**Definition 1.** Sei $\mathbb{K}$ eine Menge und $\cdot, +\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ Verknüpfungen. Dann heißt $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein *Körper*, falls

(i) $(\mathbb{K}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, d.h. $+$ ist assoziativ, es existiert ein neutrales Element $0$ für $+$ und es existieren inverse Elemente.

(ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

(iii) ein Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ gilt.

Der Beweis des folgenden Satzes ist Routine.

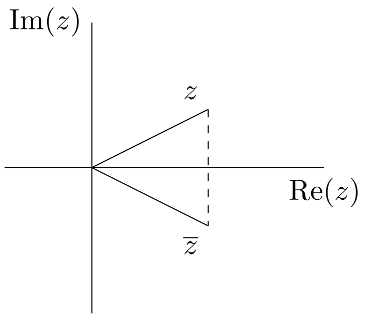


Abbildung 1: $\mathbb{C}$ als zweidimensionale reelle Ebene

**Satz 2.** *Die Menge* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *aller Paare reeller Zahlen bildet zusammen mit der Addition*

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

*und der Multiplikation*

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

*einen Körper* $\mathbb{C}$*, den wir die* komplexen Zahlen *nennen.*

Wir setzen $i = (0, 1)$ und $x = (x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir, dass sich jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ schreiben lässt als $z = x + iy$. Es gilt $i^2 = -1$ und $(x, y)(u, v) = (x + iy)(u + iv)$ und die etwas aus der Luft gegriffen anmutende Definition der Multiplikation in $\mathbb{C}$ wird durch das Distributivgesetz zusammen mit der Forderung $i^2 = -1$ forciert. Insbesondere sind in $\mathbb{C}$ die Zahlen $\pm i$ Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, d.h. $i$ lässt sich als $\sqrt{-1}$ interpretieren. Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennen wir $x = \operatorname{Re}(z)$ den *Realteil* von $z$, $y = \operatorname{Im}(z)$ den *Imaginärteil* von $z$ und $i$ die *imaginäre Einheit*. Der Körper $\mathbb{C}$ trägt auch geometrische Struktur.

**Definition 3.** Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir definieren
- (i) das *komplex Konjugierte* $\overline{z} = x - iy$ von $z$.
- (ii) den *Betrag* $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ von $z$.

**Bemerkung 4.**
- (i) Anschaulich kann man $\mathbb{C}$ als zweidimensionale reelle Ebene interpretieren. Eine komplexe Zahl entspricht einem Punkt der Ebene, komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der $x$-Achse und der Betrag eine komplexen Zahl ist ihr Abstand zum Ursprung, siehe auch Abbildung 1.
- (ii) Man verifiziert leicht, dass $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $2\operatorname{Re}(z) = z + \overline{z}$ und $2i\operatorname{Im}(z) = z - \overline{z}$.

(iii) Es gilt $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \geq 0$ für $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Damit ist $|x|_\mathbb{R} = |x|_\mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{R}$.
(iv) Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ nur für $z = 0$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ und die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Deshalb definiert $|-|$ eine *Norm* auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

## 1.2 $\mathbb{R}$-lineare und $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen

Der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden sowohl einen eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum als auch einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir unterscheiden zwischen $\mathbb{R}$-linearen und $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen. Ist eine Abbildung $T\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex linear, so ist $T(z) = zT(1)$ und in der Tat ist jedes solche $T$ von der Form $T(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Natürlich ist jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung auch $\mathbb{R}$-linear. Die Umkehrung gilt nicht. Zum Beispiel ist $T(z) = \overline{z}$ reell linear aber nicht komplex linear.

**Lemma 5.**
(i) *Eine Abbildung $T\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{R}$-linear, wenn gilt, dass $T(z) = T(1)x+T(i)y = \lambda z+\mu\overline{z}$ für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $2\lambda = T(1)-iT(i)$ und $2i\mu = T(1) + iT(i)$.*
(ii) *Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $T(i) = iT(1)$.*

Wir können $\mathbb{C}$ durch $x + iy \longmapsto (x, y)$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich durch eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellen. Sei $T\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung und

$$T(z) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $T(1) = a + ic$ und $T(i) = b + id$. Damit erhalten wir eine Charakterisierung reeller Matrizen, die $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ induzieren.

**Satz 6.** *Die von der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ induzierte Abbildung $T\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $c = -b$ und $a = d$, d.h. $A$ ist von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -c \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$.*

## 1.3 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Wir haben gesehen, dass die Abbildung $|-|$ mit $|z|^2 = z\overline{z}$ eine Norm auf $\mathbb{C}$ ist. Damit erhalten wir einen Konvergenzbegriff für komplexe Zahlen.

**Definition 7.** Ein Folge komplexer Zahlen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *konvergiert gegen* $c \in \mathbb{C}$, falls $|c_n - c| \to 0$ für $n \to \infty$ im Sinne der reellen Analysis. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Eine Folge $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ heißt *Cauchyfolge*, falls $|c_n - c_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$ im Sinne der reellen Analysis.

Mit Hilfe der Ungleichungen

$$\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \tag{1}$$

$$|z| = |\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \tag{2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ erhält man eine Charakterisierung der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}$ durch die Konvergenz der entsprechenden Folgen von Real- und Imaginärteil.

**Satz 8.** *Sei $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ eine Folge.*

(i) *Die Folge $(c_n)_n$ ist genau dann konvergent, wenn die Folgen $(\operatorname{Re}(c_n))_n \subset \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im}(c_n))_n \subset \mathbb{R}$ konvergent sind. Im Falle der Konvergenz gilt*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z) + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z).$$

(ii) *Die Folge $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn $(\operatorname{Re}(c_n))_n \subset \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im}(c_n))_n \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolgen sind.*

(iii) *Insbesondere ist der normierte Raum $(\mathbb{C}, |-|)$ vollständig, d.h. jede Cauchyfolge aus $\mathbb{C}$ ist konvergent.*

*Beweis.* Schreibe $\operatorname{Re}(c_n) = a_n$ und $\operatorname{Im}(c_n) = b_n$. Sei $c_n \to c$ für $n \to \infty$ und $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Aus (1) folgt

$$|c_n - c| \geq |\operatorname{Re}(c_n - c)| = |a_n - a|, \quad |c_n - c| \geq |\operatorname{Im}(c_n - c)| = |b_n - b|,$$

also $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Den Rest des Satzes beweist man analog. □

## 1.4 Topologie in $\mathbb{C}$

**Definition 9.**

(i) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls für jedes $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \colon |z - w| < \varepsilon\} \subset U$.

(ii) Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

(iii) Eine Menge $B \subset \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls ein $\rho > 0$ existiert mit $B \subset U_\rho(0)$.

(iv) Eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist. Ein bekanntes Resultat von Heine-Borel zeigt die Äquivalenz dieser Definition zum allgemeinen topologischen Begriff der Kompaktheit: Jede offene Überdeckung von $K$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

(v) Sei $M \subset \mathbb{C}$ beliebig. Dann heißt

$$M^\circ = \bigcup\{U \subset M \colon U \text{ ist offen}\}$$

das *Innere* von $M$. Die Menge

$$\overline{M} = \bigcap\{A \supset M \colon A \text{ ist abgeschlossen}\}$$

heißt der *Abschluss* oder die *abgeschlossenen Hülle* von $M$. Die Menge $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt *Rand* von $M$.

**Satz 10.**

(i) *Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder in $\mathbb{C}$ konvergenten Folge aus $A$ ebenfalls in $A$ liegt.*

(ii) *Eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge aus $K$ eine konvergente Teilfolge besitzt.*

## 1.5 Stetige Funktionen

**Definition 11.** Eine Funktion $f\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig in* $z_0 \in \mathbb{C}$, falls für alle Folgen $(z_n)_n \subset D$ aus $z_n \to z_0$ folgt, dass $f(z_n) \to f(z_0)$. Die Funktion $f$ heißt *stetig auf* $D$, wenn $f$ in jedem Punkt $z_0 \in D$ stetig ist.

**Bemerkung 12.**

(i) Addition, Produkt sowie Komposition stetiger Funktionen ist wieder stetig. Sind $f, g\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ so ist $f/g$ stetig auf $D \setminus g^{-1}(0)$.

(ii) Eine Funktion $f\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ stetig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\overline{f}$ stetig ist.

(iii) Alle Polynomfunktionen sind stetig.

**Definition 13.** Sei $f\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $D$, d.h. es existiert eine Folge $(w_n)_n \subset D$ mit $w_n \to w$. Wir schreiben

$$\lim_{z \to w} f(z) = c,$$

falls für alle Folgen $(w_n)_n \subset D \setminus \{w\}$ mit $w_n \longrightarrow w$ gilt, dass $f(w_n) \longrightarrow c$. Wir schreiben

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = c,$$

falls $D$ unbeschränkt ist und für alle Folgen $(w_n)_n \subset D$ mit $|w_n| \longrightarrow \infty$ gilt, dass $f(w_n) \longrightarrow c$.

**Definition 14.** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und sei $F\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

(i) Wir sagen $f_n \to f$ punktweise, wenn für alle $x \in D$ gilt, dass $f_n(x) \to f(x)$.

(ii) Wir sagen $f_n \to f$ gleichmäßig auf $D$, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, wobei

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in D} |g(x)|$$

für $g\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ die *Supremumsnorm* von $g$ sei.

**Bemerkung 15.** Ist $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf $D$, so ist auch $f$ stetig auf $D$.

**Definition 16.** Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend* oder *wegweise zusammenhängend*, falls für alle $x, y \in D$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow D$ existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

**Definition 17.** Ein *Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$ ist eine offene und wegweise zusammenhängende Menge.

## 1.6 Potenzreihen

Es sei $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Existiert der Limes

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} a_n,$$

so setzen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} a_n.$$

Wir sagen, dass die *Reihe* $\sum a_n$ konvergiert. Ist $\sum a_n$ konvergent, so ist $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ eine Nullfolge. Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert *absolut*, falls $\sum |a_n|$ konvergiert. Absolute Konvergenz einer Reihe impliziert Konvergenz. Analoge Definitionen gelten für Reihen von Funktionen $g_n\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$.

**Satz 18.** *Sei $(M_n)_n \subset \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\sum M_n$ konvergiert. Seien $g_n\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ so, dass $\|g_n\|_\infty \leq M_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum g_n$ absolut und gleichmäßig auf $D$.*

*Beweis.* Es gibt ein $N \geq 0$ mit $\|g_n\|_\infty \leq M_n$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{K} |g_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |g_n(z)| + \sum_{n=N}^{K} M_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} |g_n(z)| + \sum_{n=N}^{\infty} M_n$$

für jedes $K \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge der Partialsummen von $(|g_n(z)|)_n$ ist beschränkt und natürlich monoton. Also konvergiert $\sum g_n(z)$ absolut für jedes $z \in D$. Wir schreiben $\sum g_n$ für den punktweisen Grenzwert der Funktionenreihe.

Für $K \geq N$ gilt

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) - \sum_{n=0}^{K} g_n(z)\Big| \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} |g_n(z)| \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} M_k$$

für alle $z \in D$, also

$$\Big\|\sum_{n=0}^{\infty} g_n - \sum_{n=0}^{K} g_n\Big\|_\infty \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} M_k \longrightarrow 0,$$

d.h. $\sum g_n$ konvergiert gleichmäßig auf $D$. $\square$

**Definition 19.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f, f_n : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt auf $U$ *lokal gleichmäßig konvergent* gegen $f$, falls für alle kompakten Teilmengen $K \subset U$ gilt, dass $f_n|_K \longrightarrow f|_K$ gleichmäßig für $n \to \infty$. Äquivalenterweise konvergiert $(f_n)_n$ genau dann lokal gleichmäßig gegen $f$, wenn für jedes $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f_n|_{U_\varepsilon(z)} \longrightarrow f|_{U_\varepsilon(z)}$ gleichmäßig für $n \to \infty$.

**Lemma 20.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$. Ist die Folge $(\rho^n a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ beschränkt, so konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*absolut und lokal gleichmäßig auf $U_\rho(z_0)$.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass für alle $r < \rho$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

absolut und gleichmäßig auf $U_r(z_0)$ existiert. Da $(\rho^n a_n)_n$ beschränkt ist, existiert ein $M > 0$ mit $\rho^n a_n < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $r \in (0, \rho)$. Dann gilt $|z - z_0| < r$ für alle $z \in U_r(z_0)$ und wir erhalten

$$|a_n(z - z_0)^n| = |\rho^n a_n| \Big| \frac{(z - z_0)^n}{\rho^n} \Big| \leq M \Big| \frac{z - z_0}{\rho} \Big|^n = M \Big| \frac{z - z_0}{r} \Big|^n \Big| \frac{r}{\rho} \Big|^n \leq M \Big| \frac{r}{\rho} \Big|^n.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum a_n (z - z_0)^n$ absolut und gleichmäßig auf $U_r(z_0)$. $\square$

**Satz 21.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Dann gibt es eine Zahl $\rho \in [0, \infty]$, so dass die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*auf $U_\rho(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert und auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_\rho(z_0)}$ divergiert.*

**Bemerkung 22.**

(i) Auf $\partial U_\rho(z_0)$ gibt es keine Aussage.

(ii) Die Zahl $\rho$ heißt *Konvergenzradius* und es gilt

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

die sogenannte Formel von Cauchy und Hadamard.

*Beweis von Satz 21.* Wir zeigen zuerst die Konvergenz auf $U_\rho(z_0)$. Sei $r \in (0, \rho)$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$$

und es folgt $|a_n|^{1/n} < 1/r$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $r^n|a_n| < 1$ für fast alle $n$, d.h. die Folge $(r^n|a_n|)_n$ ist beschränkt. Wegen Lemma 20 konvergiert die Reihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ absolut und lokal gleichmäßig auf $U_r(z_0)$. Da $r \in (0, \rho)$ beliebig war, gilt dies auch auf $U_\rho(z_0)$.

Nun zur Divergenz auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_\rho(z_0)}$. Sei $\rho \in (0, \infty)$ und $|z - z_0| > \rho$, d.h.

$$|z - z_0|^{-1} < \frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Also gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, dass $|z - z_0|^{-1} < |a_n|^{1/n}$, d.h. $1 < |a_n(z - z_0)^n|$ für unendlich viele $n$. Also ist $(a_n(z - z_0)^n)_n$ keine Nullfolge, also divergiert die Reihe $\sum a_n(z - z_0)^n$. $\square$

**Beispiel** (Die geometrische Reihe)**.** Wie in Analysis 1 zeigt man leicht, dass

$$\sum_{n=0}^{K} z^n = \frac{1 - z^{K+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

Also gilt $\sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$ für $z \in U_1(0)$. Diese Reihe hat den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} 1^{1/n} = 1.$$

**Definition 23.** Eine Funktion $f \colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $U$ offen, heißt *analytisch* an der Stelle $z_0 \in U$, falls ein $\varepsilon > 0$ und eine Reihe $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ mit positiven Konvergenzradius existiert, so dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

für alle $z \in U_\varepsilon(z_0)$. Ist $f$ analytisch an allen $z \in U$, so heißt $f$ analytisch auf $U$.

# 2 Holomorphe Funktionen

## 2.1 Definition

**Definition 1.** Eine Funktion $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $U$ offen, heißt *komplex differenzierbar* an der Stelle $z_0 \in U$, wenn der Limes

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, z_0+h\in U}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f'(z_0) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Ist $f$ überall in $U$ komplex differenzierbar, so heißt $f$ *holomorph*.

**Bemerkung 2.**
(i) Wir nennen $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ganze Funktion*, falls $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.
(ii) Die Zahl $f'(z_0)$ heißt die *Ableitung* von $f$ im Punkt $z_0$.
(iii) Es gelten die üblichen Summen-, Produkt- und Quotienteregeln: Sind $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann auch $f+g$ und $fg$ und $f/g$ ist auf $U \setminus g^{-1}(0)$ holomorph. Es gilt $(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ und $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.
(iv) Es gilt die Kettenregel: Seien $U \subset \mathbb{C}$ und $V \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist die Komposition $g \circ f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gilt $(g\circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ für alle $z \in U$.

**Beispiel 3.**
(i) Die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z+h) - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z)}{h} = 1.$$

Damit sind alle Polynome und rationale Funktionen holomorph.
(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$ ist zwar stetig, aber nirgendwo komplex differenzierbar, denn sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\Delta_{z_0}(h) \coloneqq \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

also $\Delta_{z_0}(x) = 1$ und $\Delta_{z_0}(ix) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also existiert $\lim \Delta_{x_0}(h)$ nicht.

**Satz 4.** *Sei $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$ für $z \in U_\rho(z_0)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt:*

(i) *Die Reihen*

$$f_m(z) \coloneqq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (z-z_0)^{n-m}$$

*haben ebenfalls den Konvergenzradius $\rho$.*

(ii) *Die Funktion $f$ ist auf $U_\rho(z_0)$ holomorph und die Ableitung kann gliedweise gebildet werden, d.h. $f'(z) = f_1(z)$ für alle $z \in U_\rho(z_0)$.*

**Bemerkung 5.**

(i) Aus Satz 4 folgt, dass jede analytische Funktion holomorph ist.

(ii) Es folgt auch, dass $f$ unendlich oft komplex differenzierbar ist. Im Allgemeinen gilt $f^{(m)}(z) = f_m(z)$. Es gilt $f^{(m)}(z_0) = m! a_m$, also ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

die Taylorentwicklung von $f$.

*Beweis von Satz 4.* Für (i) benutzt man $\lim_{n\to\infty} (n-a)^{1/n} = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Wir berechnen den Konvergenzradius $\rho_1$ von $f_1(z)$. Es gilt

$$\frac{1}{\rho_1} = \limsup_{n\to\infty} |n a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{(1/n)} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho}$$

und durch Induktion folgt $\rho = \rho_m$, $m \in \mathbb{N}$, für die Konvergenzradien $\rho_m$ von $f_m(z)$.

Sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und sei $z \in U_\rho(0)$. Dann existiert $r \in (0, \rho)$ mit $|z| < r$. Es gilt

$$\left| \frac{1}{h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left( \frac{(z+h)^n}{h} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right|.$$

Mit dem binomischen Lehrsatz folgt

$$\Delta_n(z,h) \coloneqq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left( \frac{(z+h)^n}{h} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1} \right) = h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}.$$

Für $k \geq 2$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Es folgt, dass

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \Delta_n(z,h)\Big| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |h||a_n| n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2}|z|^{n-k} = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} |h||a_n| n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} |h|^{j}|z|^{n-2-j} \leq \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|(|h|+r)^{n-2} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

denn mit Teil (i) erhält man, dass für $|h| + r < \rho$ die letzte Reihe konvergiert. □

**Beispiel 6.** Wir definieren die Funktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Da die monotone Folge

$$a_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{|z|^n}{n!}$$

durch $e^{|z|}$ beschränkt ist, ist $\sum_n z^n/n!$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent.

Analog definiert man

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\exp' &= \exp \\
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin .
\end{aligned}
$$

Ferner gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ für $z, w \in \mathbb{C}$, das folgt aus dem Produktsatz von Cauchy. Es gilt

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad \exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, woraus

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

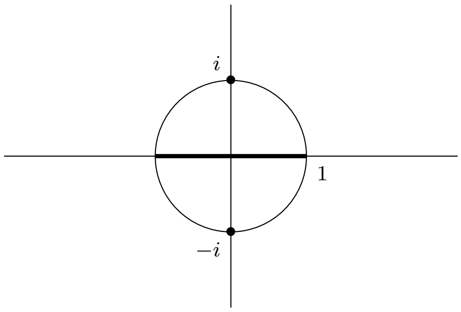


Abbildung 2: Konvergenzradius in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt. Wir beobachten, dass jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ sich als $z = |z| \exp(i\varphi)$ schreiben lässt, wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ modulo $2\pi$ eindeutig ist und $\tan(\varphi) = \mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)$ erfüllt.

Warum hat die reelle Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

nur den Konvergenzradius $\rho = 1$? Die reelle Funktion $1/(1+x^2)$ ist die Einschränkung der komplexen Funktion $1/(1+z^2)$ auf $\mathbb{R}$ mit derselben Potenzreihenentwicklung um 0. Die Reihe $\sum_n (-1)^n z^{2n}$ hat Konvergenzradius $\rho = 1$. Er kann nicht größer sein, denn für $z = \pm i$ konvergiert die komplexe Potenzreihe nicht, siehe Abbildung 2. Das Konvergenzverhalten reeller Potenzreihen erklärt sich häufig erst durch Betrachtung in der komplexen Ebene.

## 2.2 Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Abbildung. Wir identifizieren $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ durch den Isomorphismus $z = x + iy \longmapsto (x, y)$. Somit können wir die Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ als eine Abbildung $F\colon U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ interpretieren.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, no head, "\circ" marking] \arrow[d, no head, "\wr"] & \mathbb{C} \arrow[r, no head, "f"] \arrow[d, no head, "\wr"] & \mathbb{C} \arrow[d, no head, "\wr"] \\
U \arrow[r, no head, "\circ" marking] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, no head, "F"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Wir schreiben $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$ für $z = x + iy \in U$. Was ist die Beziehung zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von $f$ und der mehrdimensionalen reellen Differenzierbarkeit von $F$? Zur Erinnerung: eine Funktion $F\colon U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *(total) differenzierbar* an der Stelle $p_0 \in U$, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$F(p_0 + h) = F(p_0) + Ah + \|h\|_2 \varphi(h)$$

für eine Funktion $\varphi$ mit $\varphi(h) \longrightarrow 0$ für $h \to 0$, d.h. $F$ ist lokal um $p_0$ approximierbar durch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Ist $F = (u, v)$ (total) differenzierbar, so gilt

$$DF(p_0) \coloneqq A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

**Satz 7.** *Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir setzen $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$. Ist dann $f$ auf $U$ komplex differenzierbar, so ist $F = (u,v)$ total differenzierbar auf $U \subset \mathbb{R}^2$ und es gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

*für alle $(x,y) \in U$, die so genannten* Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.

*Beweis.* Aus

$$\lim_{h\to 0} T(h,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) = 0$$

folgt $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + |h|\varphi(h)$ mit $\varphi(h) = (h/|h|)T(h,z_0)$. Es gilt also

$$F((x_0,y_0) + h) = F(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} h + |h|\varphi(h),$$

d.h. $F$ ist total differenzierbar und man hat

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = DF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

d.h. die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. □

**Bemerkung.**

(i) Die komplexe Differenzierbarkeit von $f$ besagt, dass $f$ lokal durch eine $\mathbb{C}$-lineare Transformation approximierbar ist.

(ii) Eine andere Herleitung der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen lautet wie folgt. Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(z+h)-u(z)+i(v(z+h)-v(z))}{h} \\
&= \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_1\in\mathbb{R}}} \frac{u(x+h_1,y)-u(x+h_1,y)+i(v(x+h_1,y)-v(x+h_1,y))}{h_1} \\
&= \lim_{\substack{h_2\to 0\\ h_2\in\mathbb{R}}} \frac{u(x,y+h_2)-u(x,y+h_2)+i(v(x,y+h_2)-v(x,y+h_2))}{ih_2}
\end{aligned}$$

und es folgen direkt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Man erhält sogar

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Satz 8.** *Seien $u, v\colon U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy \in U$. Sind $u$ und $v$ stetig differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf $U$, so ist $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und es gilt*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \quad z = x + iy \in U.$$

*Beweis.* Wegen $u, v \in C^1(U)$ ist $f = (u,v)$ reell differenzierbar, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
F((x,y)+(h_1,h_2)) &= (u(x,y),v(x,y)) + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(h_1,h_2) + |h|\psi(h) = \\
&= (u(x,y),v(x,y)) + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & v_x \end{pmatrix}(h_1,h_2) + |h|\psi(h)
\end{aligned}$$

mit $\psi(h) \longrightarrow 0$ für $|h| \to 0$. Also gilt mit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= u(x+h_1,y+h_2) - u(x,y) + i(v(x+h_1,y+h_2) - v(x,y)) = \\
&= u_x h_1 + u_y h_2 + i(-u_y h_1 + u_x h_2) + |h|\psi(h) = (u_x - iu_y)h + |h|\psi(h).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $f$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = u_x(z) - iu_y(z)$ für alle $z \in U$ ist. □

**Bemerkung 9.** Ist $f = u + iv$ und $f$ komplex differenzierbar, so sind $u$ und $v$ reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Sind $u$ und $v$ beide $C^1$ und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, so ist $f$ komplex differenzierbar. In beiden Fällen gilt $f'(z) = u_x + iu_y$.

**Beispiel 10.**

(i) Ist $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = x^2y^2 + ix^2y^3$. Ist $f$ komplex differenzierbar? Es sind $u, v \in C^1$ mit $u_x = 3x^2y^2$, $u_y = 2x^3y$, $v_y = 3x^2y^2$ und $-v_x = -2xy^3$. Notwendig für die komplexe Differenzierbarkeit von $f$ ist also $zx^3y + zxy^3 = 0$, d.h. $2xy(x^2+y^2) = 0$, d.h. $x = 0$ oder $y = 0$. Also ist $f$ komplex differenzierbar auf

$$\{z \in \mathbb{C} : x = 0 \text{ oder } y = 0\}.$$

(ii) Wir betrachten $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$. Für $z = x + iy$ ist $\exp(z) = \exp(x)\cos y + i \exp(x) \sin y$. Für $u = \exp(x)\cos y$ und $v = \exp(x)\sin y$ gilt $u_x = \exp(x)\cos y$, $u_y = -\exp(x)\sin y$, $v_y = \exp(x) cosy$ und $v_x = \exp(x)\sin y$. Also ist exp holomorph und es gilt $\exp'(z) = u_x - iu_y = \exp(x)\cos y + i\exp(x)\sin y = \exp(z)$.

**Satz 11.** *Ist $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $U$ offen, mit $f = u + iv$ holomorph und sind $u$ und $v$ zweimal reell stetig differenzierbar, so gilt*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}.$$

**Bemerkung 12.** Man nennt den Differentialoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

den *Lapaceoperator*. Gilt $\Delta u = 0$, so heißt $u$ *harmonische Funktion.*

*Beweis von Satz 11.* Wir wissen $u_x = v_y$ ud $u_y = -v_x$. Damit folgt $u_{xy} = v_{yy}$ und $-u_{yx} = v_{xx}$. Wegen $u, v \in C^2$ folgt $u_{xy} = u_{yx}$, also $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Analog beweist man $u_{xx} + u_{yy} = 0$. □

## 2.3 Die Differentialoperatoren $\partial_z$ und $\partial_{\overline{z}}$

Sei $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar mit $f = u + iv$. Dann existieren die partiellen Ableitungen nach $x$ und $y$ von $f$, $u$ und $v$. Wir setzen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Wir definieren die Differentialoperatoren, die sogenannten Wirtinger-Ableitungen,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Wir geben folgende nichtrigorose Motivation. Man kann eine Funktion $f(z) = f(x, y)$ auffassen als Funktion $f(z, \overline{z})$ mit der Variablentransformation $2x = z + \overline{z}$ und $2iy = z - \overline{z}$.

Betrachten wir formal $z$ und $\overline{z}$ als unabhängige Koordinaten, so erhalten wir mit der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

und analog die Formel für $\partial/\partial\overline{z}$.

**Satz 13.** *Ist $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $U$ offen, holomorph, so gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f' = 2\frac{\partial u}{\partial z}.$$

*Beweis.* Es ist

$$2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

wegen der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Weiter ist

$$2\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2i\frac{\partial u}{\partial y} = 2f'(z) = 4\frac{\partial u}{\partial z}.$$ □

Man erhält folgenden Rechentrick: Schreibe $f(z)$ als eine Funktion nur von $z$ und $\overline{z}$. Dann kann man beim Differenzieren nach den komplexen Variablen $z$ und $\overline{z}$ so tun, als ob $z$ und $\overline{z}$ voneinander unabhängige Variablen sind (s. Remmert-Schumacher, S. 61). Holomorphe Funktionen sind "unabhängig" von $\overline{z}$ und hängen allein von $\overline{z}$ ab.

**Beispiel 14.**

(i) Für $f(z) = \overline{z}$ rechnet man $\partial_z f = 0$ und $\partial_{\overline{z}} f = 1$. Formal erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - i(-i)\right) = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 1\right) = 1.$$

(ii) Für $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ rechnet man $\partial_z f = \overline{z}$ und $\partial_{\overline{z}} f = z$. Formal erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(2x - i2y\right) = \overline{z}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(2x + i2y\right) = z.$$

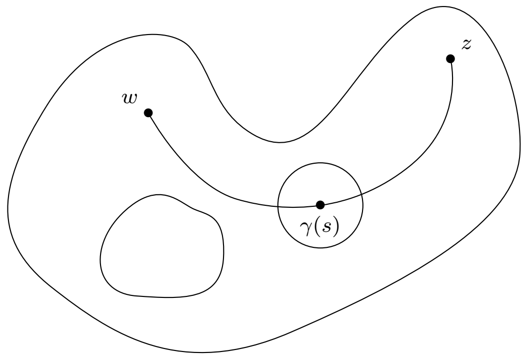


Abbildung 3: Beweis von Satz 15

## 2.4 Lokal konstante Funktionen

Eine Funktion $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *lokal konstant*, falls für alle $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(z) \subset U$ und $f|_{U_\varepsilon(z)}$ konstant ist. Bekanntlich ist eine differenzierbare Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla u = 0$ lokal konstant.

**Satz 15.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist jede lokal konstante Funktion $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ konstant auf $G$.*

*Beweis.* Seien $z, w \in G$ und $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow G$ stetig mit $\gamma(0) = w$ und $\gamma(1) = z$. Sei

$$M = \{t \in [0,1]\colon F(t) := f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = 0\}.$$

Die Funktion $F\colon [0,1] \longrightarrow G$ ist stetig und $M = F^{-1}(0)$. Also ist $M$ abgeschlossen und daher kompakt. Dann ist $s = \sup M \in M$, d.h. $f(\gamma(s)) = f(\gamma(0))$ und $f(\gamma(s')) \neq f(\gamma(0))$ für alle $s' > s$. Wäre $s \in [0,1)$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $f(z) = f(\gamma(s)) = f(\gamma(0))$ für $|z - \gamma(s)| < \delta$. Da $\gamma$ stetig ist, existiert ein $\delta' > 0$, so dass $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \delta$ für $|s - t| < \delta'$. Daraus folgt insbesondere $f(\gamma(s + \delta'/2)) = f(\gamma(s)) = f(\gamma(0))$, was $s = \sup M$ widerspricht. $\square$

**Satz 16.** *Für $f\colon U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) *Die Funktion $f$ ist lokal konstant auf $U$.*
(ii) *Die Funktion $f$ ist holomorph auf $U$ mit $f' = 0$.*

*Beweis.* Die Richtung (i) $\to$ (ii) ist klar. Ist $f'(z) = 0$, so ist $u_x - iu_y = 0$, so folgt $\nabla u = 0$, d.h. $u$ ist lokal konstant. Mit den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen folgt $\nabla v = 0$, d.h. $v$ ist lokal konstant. $\square$

# 3 Kurvenintegrale

## 3.1 Integrationswege

**Definition 1.** Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

(i) Eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

von $I$ gibt, so dass $f|_{(t_{i-1},t_i)}$ für alle $i \in \{1, \ldots m\}$ stetig ist und sich stetig auf $[t_{i-1}, t_i]$ fortsetzen lässt.

(ii) Eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn $f$ stetig ist und es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

von $I$ gibt, so dass $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ stetig differenzierbar ist.

Man erinnere sich, dass das Integral komplexer Funktionen $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

**Bemerkung 2.** Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und stückweise stetigen Funktionen $f, f_1, f_2\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ ist das Integral linear,

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \alpha f_2) = \alpha \int_a^b f_1 + \beta \int_a^b f_2,$$

verträglich mit komplexer Konjugation,

$$\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f},$$

und es gilt eine Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Ist $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $F\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Man hat eine Substitutionsregel. Ist $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow [c, d]$ eine monotone und stückweise stetig differenzierbare Bijektion und $g\colon [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int_a^b (g \circ \varphi)\varphi' = \int_c^d g.$$

**Lemma 3.** *Ist $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, so gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Beweis.* Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Dann gilt

$$z \int_a^b f = \int_a^b zf.$$

Also erhält man

$$\operatorname{Re}\left(z \int_a^b f\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(zf) \leq \int_a^b |zf| = \int_a^b |f|.$$

Das Resultat ist trivial für $\int_a^b f = 0$. Sonst folgt die Behauptung mit

$$z = \frac{\overline{\int_a^b f}}{\left|\int_a^b f\right|}. \qquad \square$$

**Definition 4.** Ein *Integrationsweg* in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$. Man nennt $\gamma$ *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$. Die Bildmenge $\operatorname{im}\gamma$ heißt auch *Spur* von $\gamma$.

**Beispiel.**

(i) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto z_0 + r\exp(it)\end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) = ir\exp(it)$ für alle $t \in [0,2\pi]$. Die Kurve $\gamma$ ist geschlossen und $\operatorname{im}\gamma = \partial U_r(z_0)$. Wir sagen, $\gamma$ ist *positiv orientiert.*

(ii) Für $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ parametrisiert

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto z_0 + t(z_1 - z_0)\end{aligned}$$

die Verbindungsstrecke von $z_0$ nach $z_1$. Wir schreiben $\gamma = [z_0, z_1]$.

(iii) Seien $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dann ist der aus $\gamma_1$ und $\gamma_2$ zusammengesetzte Integrationsweg

$$\gamma_1\gamma_2\colon [a, b + (d-c)] \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert durch

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases}\gamma_1(t) & t \in [a,b]\\ \gamma_2(t + c - b) & t \in (b, b + (d-c)]\end{cases}$$

(iv) Zu jedem Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definieren wir den entgegengesetzten Weg

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \gamma(a+b-t). \end{aligned}$$

**Definition 5.** Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f\colon \operatorname{im}\gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir das Integral von $f$ entlang $\gamma$ als

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b (f \circ \gamma)\gamma'.$$

**Bemerkung 6.**

(i) Das Integral in Definition 5 ist wohldefiniert, denn $f \circ \gamma$ und $\gamma'$ sind stückweise stetig.

(ii) Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und $\gamma_1$ und $\gamma_2$ Integrationswege mit $\operatorname{im}(\gamma_i) \subset U$, so gilt

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_{\gamma_1^{-1}} f,$$

und

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

**Beispiel.** Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir integrieren $f(z) = (z-z_0)^{-1}$ entlang des Integrationsweges $\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$ und erhalten

$$\int_{|z-z_0|=r} f = \int_\gamma f = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\exp(it)} ir\exp^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von $r$.

## 3.2 Stammfunktionen

**Definition 7.** Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von $f$, fall $F$ holomorph ist mit $F' = f$. Wir sagen, dass $f$ *lokal eine Stammfunktion besitzt*, falls für jeden Punkt $z \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von $z$ existiert, so dass $f|_V$ eine Stammfunktion besitzt.

**Satz 8.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion $F$ auf $U$ besitzt und $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$ ein Integrationsweg in $U$, etwa $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z_1$. Dann ist*

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0).$$

*Beweis.* Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass alle $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ stetig differenzierbar sind. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f\circ\gamma)\gamma' = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F\circ\gamma)' = \\ &= \sum_{i=1}^m F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1})) = F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$ □

**Korollar 9.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und besitze eine Stammfunktion. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma$ in $U$, dass*

$$\int_\gamma f = 0.$$

**Beispiel 10.**

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ hat für $n \geq 0$ die Stammfunktion $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$ und es folgt für jeden Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, dass

$$\int_\gamma f = \frac{\gamma(b)^{n+1}}{n+1} - \frac{\gamma(a)^{n+1}}{n+1}.$$

(ii) Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist stetig auf $\mathbb{C}^\times$, besitzt dort aber keine Stammfunktion.

**Satz 11.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Gilt dann*

$$\int_\gamma f = 0$$

*für alle geschlossenen Integrationswege $\gamma$ in $G$, so hat $f$ auf $G$ eine Stammfunktion.*

*Beweis.* Sei $a \in G$ fest. Zu jedem $z \in G$ wählen wir einen Integrationsweg $\gamma_z\colon [0,1] \longrightarrow G$ mit $\gamma_z(0) = a$ und $\gamma_z(1) = z$. Wir setzen

$$F(z) \coloneqq \int_{\gamma_z} f.$$

Dann ist $F$ wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der $\gamma_z$, wegen der Annahme über $f$. Wir zeigen, dass $F$ Stammfunktion von $f$ ist. Sei $z \in G$ und $z_0 \in G$ mit $|z - z_0|$ so klein, dass die Verbindungsstrecke $[z, z_0]$ ganz in $G$ liegt. Wir setzen $\gamma \coloneqq \gamma_z[z,z_0]\gamma_{z_0}^{-1}$. Dann ist $\gamma$ ein geschlossener Integrationsweg in $G$, also ist

$$F(z) - F(z_0) + \int_z^{z_0} f = \int_{\gamma_z} f + \int_z^{z_0} f - \int_{\gamma_{z_0}} f = \int_\gamma f = 0.$$

Es folgt, dass

$$\frac{F(z_0) - F(z)}{z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z}\int_z^{z_0} f.$$

Wir parametrisieren die Verbindungsstrecke $[z, z_0]$ durch $[z, z_0](t) = z+t(z_0-z)$, $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\frac{F(z_0) - F(z)}{z_0 - z} = \int_0^1 f(z + t(z_0 - z))\,\mathrm{d}t$$

und

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^1 f(z + t(z_0 - z)) - f(z)\,\mathrm{d}t \Big| &\leq \int_0^1 |f(z + t(z_0 - z)) - f(z)|\,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(z + t(z_0 - z)) - f(z)| = \\
&= |f(z + \xi(z_0 - z)) - f(z)|
\end{aligned}$$

für ein $\xi \in [0,1]$, da $f$ stetig ist. Damit erhält man, dass

$$\lim_{z_0 \to z} \Big| \int_0^1 f(z + t(z_0 - z))\,\mathrm{d}t - f(z) \Big| = 0,$$

d.h.

$$\lim_{z_0 \to z} \frac{F(z_0) - F(z)}{z_0 - z} = f(z)$$

für alle $z \in G$. □

**Satz 12.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma$ ein Integrationsweg in $U$ und seien $f_n\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen, so dass $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf* $\mathrm{im}(\gamma)$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

*Beweis.* Wir parametrisieren $\gamma$ als $\gamma\colon [t_0, t_1] \longrightarrow U$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\gamma (f_n - f) \Big| &\leq \int_{t_0}^{t_1} |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \\
&= \sup_{t\in[t_0,t_1]} |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 13.**

(i) Sei $\gamma\colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Wir definieren

$$\mathrm{L}(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Wir nennen $\mathrm{L}(\gamma)$ die Länge von $\gamma$. Es gilt für stetiges $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ und jeden Integrationsweg $\gamma$ in $U$, so dass $f$ auf $\mathrm{im}(\gamma)$ gleichmäßig beschränkt ist, etwa $|f(z)| < C$ für alle $z \in \mathrm{im}(\gamma)$, dass

$$\Big| \int_\gamma f \Big| \leq C \cdot \mathrm{L}(\gamma).$$

Man schreibt auch

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_\gamma |dz|.$$

(ii) Aus dem Lebesgueschen Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir folgendes Kriterium: Seien $f, f_n \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma$ ein Integrationsweg in $U$. Konvergiert $f_n \longrightarrow f$ punktweise auf $\mathrm{im}(\gamma)$ und existiert ein stetiges $g\colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $|f_n(\gamma(t))| \leq g(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t)|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty,$$

so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

**Beispiel 14.** Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Sei $\gamma$ ein geschlossener Integrationsweg in $U_\rho(z_0)$. Dann gilt

$$\oint_\gamma f = \int_\gamma \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} a_n (z - z_0)^n \,\mathrm{d}z.$$

Nun konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf jedem Kompaktum in $U_\rho(z_0)$, also gilt

$$\oint_\gamma f = \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} \int_\gamma a_n (z - z_0)^n \,\mathrm{d}z = 0.$$

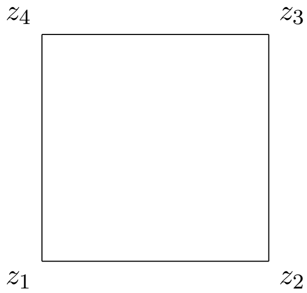


Abbildung 4: Ein Quader in $\mathbb{C}$

# 4 Der Integralsatz von Cauchy

## 4.1 Der Integralsatz von Cauchy für ein Rechteck

Sei $Q \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Rechteckfläche mit Eckpunkten $z_1$, $z_2$, $z_3$ und $z_4$. Wir nehmen $\gamma = [z_1, z_2][z_2, z_3][z_3, z_4][z_4, z_1]$ die Randkurve von $Q$.

**Satz 1.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $Q \subset U$ ein abgeschlossenes Rechteck und $\gamma$ die Randkurve von $Q$. Dann gilt*

$$\int_\gamma f = 0.$$

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass

$$\Big| \int_\gamma f \Big| < \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Da $f$ holomorph ist, gilt für alle $z, z_0 \in U$ mit $[z, z_0] \subset U$, dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \chi_{z_0}(z) \tag{1}$$

mit $(z - z_0)^{-1}\chi_{z_0}(z) \longrightarrow 0$ für $z \to z_0$. Für alle geschlossenen Integrationswege $\widetilde{\gamma}$ in $U$ gilt

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f = \int_{\widetilde{f}} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\widetilde{\gamma}} \chi_{z_0} = \int_{\widetilde{\gamma}} \chi_{z_0}. \tag{2}$$

Letzteres Integral wird für $\widetilde{\gamma}$ nah bei $z_0$ klein sein.

Wir unterteilen $Q$ durch vertikales und horizontales Halbieren zunächst in vier Teile. Wir erhalten vier Rechtecke $O_1$, $P_1$, $Q_1$ und $R_1$ mit Randkurven $\partial O_1$, $\partial P_1$, $\partial Q_1$ und $\partial R_1$, siehe Abbildung 5. Es gilt

$$\int_\gamma f = \int_{\partial O_1} f + \int_{\partial P_1} f + \int_{\partial Q_1} f + \int_{\partial R_1} f.$$

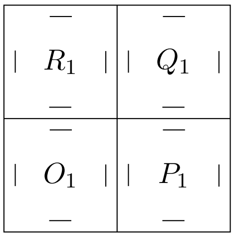


Abbildung 5: Unterteilen eines Rechtecks durch Halbieren

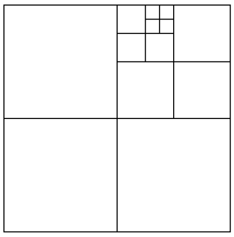

Abbildung 6: Konvergenz des Halbierens

Ohne Einschränkung sei $Q_1$ so, dass das Integral über seine Randkurve unter denen von $O_1$, $P_1$, $Q_1$ und $R_1$ im Betrag maximal ist. Dann gilt

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \leq 4\Big|\int_{\partial Q_1} f\Big|.$$

Gehen wir induktiv so vor, erhalten wir eine Folge von Rechtecken

$$Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq Q_3 \supsetneq \cdots \supsetneq Q_n \supsetneq \cdots$$

mit Randkurven $\gamma_i = \partial Q_i$, und

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\gamma_n} f\Big|.$$

Dieses Verfahren ist in folgendem Sinne konvergent. Ist $\rho$ die Diagonallänge von $Q$ und $\ell$ der Umfang von $Q$, so hat $Q_n$ Diagonalen der Länge $2^{-n}\rho$ und Umfang $2^{-n}\ell$. Sei $(z_i) \subset Q$ die Folge der Mittelpunkte der $Q_i$. Wir haben für $N \in \mathbb{N}$, dass $|z_n - z_m| \leq 2^{-N}\rho$ für alle $n, m > N$, d.h. $(z_i)$ ist eine Cauchyfolge. Sei $z_0 = \lim_i z_i$.

Wir haben

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\gamma_n} f\Big| \underset{(2)}{=} 4^n\Big|\int_{\gamma_n} \chi_{z_0}\Big|$$

und $|z_0 - z| \leq 2^{-n}\rho$ für alle $n \geq 1$ und $z \in \operatorname{im}\gamma_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n$ so groß, dass $|(z-z_0)^{-1}\chi_{z_0}(z)| > \varepsilon$ für alle $z \in \operatorname{im}\gamma_n$, siehe (1). Es ist also $|\chi_{z_0}(z)| < \varepsilon|z-z_0| < 2^{-n}\varepsilon\rho$

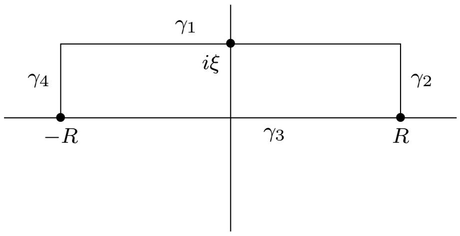


Abbildung 7: Integrationswege in Beispiel 2

für alle $z \in \operatorname{im}\gamma_n$. Es folgt, dass

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \leq 4^n \Big|\int_{\gamma_n} \chi_{z_0}\Big| \leq 4^n \cdot 2^{-n}\varepsilon\rho\,\mathrm{L}(\gamma_n) = 4^n \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-n}\varepsilon\rho\ell \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \qquad \square$$

**Beispiel 2.** Wir zeigen für $\xi \in \mathbb{R}$, dass

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} I := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x\xi)\,\mathrm{d}x = e^{-\xi^2}.$$

Dieses Integral bestimmt die Fouriertransformation von $e^{-x^2}$. Wir können annehmen, dass $\xi \geq 0$. Für $\xi = 0$ ist $I$ genau das bekannte Gaußintegral, d.h. $I = \sqrt{\pi}$. Sei also $\xi > 0$. Es gilt

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} \cos(2x\xi)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \exp(-x^2)\exp(-i2x\xi)\,\mathrm{d}x,$$

denn Re ist stetig und linear. Wir bezeichnen letzteres Integral mit $I_R$. Dann gilt

$$I_R = \int_{-R}^{R} \exp\big(-(x^2 + i2x\xi)\big) = \exp(-\xi^2)\int_{-R}^{R} \exp\big(-(t+i\xi)^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Wir bemerken, dass letzteres Integral ein komplexes Kurvenintegral ist, entlang der Kurve $\gamma_1$, siehe Abbildung 7. Es folgt

$$\exp(\xi^2) I_R = \int_{\gamma_1} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z.$$

Wir können $\gamma_1$ zu einer geschlossenen Kurve erweitern, siehe Abbildung 7, und erhalten

$$0 = \exp(\xi^2) I_R + \int_{\gamma_2} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z,$$

denn $\exp(-z^2)$ ist eine ganze Funktion. Es gilt

$$\int_{\gamma_3} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Parametrisierung $\gamma_4\colon [0,\xi] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_4(t) = -R + it$ folgt

$$\Big|\int_{\gamma_4} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z\Big| = \Big|\int_0^\xi \exp(-(it-R)^2)\,\mathrm{d}t\Big| \leq$$
$$\leq \exp(-R^2)\int_0^\xi |\exp(t^2+2itR)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Analog zeigt man

$$\Big|\int_{\gamma_2} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z\Big| \leq c_\xi \exp(-R^2) \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Insgesamt erhält man

$$I = -\exp(-\xi^2)\operatorname{Re}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2\gamma_3\gamma_4} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}\exp(-\xi^2).$$

## 4.2 Der Integralsatz von Cauchy für Bilder von Rechtecken

Sei $Q \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Rechteck. Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\varphi\colon Q \longrightarrow \mathbb{C}$ im reellen Sinn stetig differenzierbar mit $\varphi(Q) \subset U$. Sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung von $\partial Q$. Dann ist $\varphi\circ\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg in $U$. Wir möchten zeigen, dass

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = 0.$$

Es gilt $(\varphi\circ\gamma)' = (D\varphi\circ\gamma)\gamma'$ nach der Kettenregel, expliziter

$$D\varphi(\gamma(t))\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(\gamma(t)) & \partial_y\varphi_1(\gamma(t)) \\ \partial_x\varphi_2(\gamma(t)) & \partial_y\varphi_2(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

**Lemma 3.** *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\varphi\colon K \longrightarrow \mathbb{C}$ im reellen Sinn stetig differenzierbar und $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow K$ ein Integrationsweg. Sei*

$$\alpha := 4\sup_{z\in K} |\partial_x\varphi_1(z)| + |\partial_x\varphi_2(z)| + |\partial_y\varphi_1(z)| + |\partial_y\varphi_2(z)| < \infty.$$

*Dann gilt:*

(i) *Für alle $z, w \in K$ mit $[z,w] \subset K$ ist $|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq \alpha|z-w|$.*
(ii) *Es ist $\mathrm{L}(\varphi\circ\gamma) \leq \alpha\,\mathrm{L}(\gamma)$.*

*Beweis.* Die Aussage $(i)$ ist genau der Mittelwertsatz in $\mathbb{R}^2$. Weiter gilt

$$\mathrm{L}(\varphi\circ\gamma) = \int_0^1 |(\varphi\circ\gamma)'(t)|\,\mathrm{d}t \underset{(*)}{\leq} \frac{\alpha}{4}\int_0^1 |\gamma_1'| + |\gamma_2'| + |\gamma_1'| + |\gamma_2'|\,\mathrm{d}t \leq \alpha\,\mathrm{L}(\gamma). \qquad \square$$

**Lemma 4.** *Seien $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\varphi\colon K \longrightarrow \mathbb{C}$ im reellen Sinn stetig differenzierbar und $\gamma, \gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow K$ Integrationswege mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ so, dass $\varphi(K) \subset U$. Dann gilt:*

(i) *Man hat*

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = -\int_{\varphi\circ\gamma^{-1}} f.$$

(ii) *Man hat*

$$\int_{\varphi\circ(\gamma_1\gamma_2)} f = \int_{\varphi\circ\gamma_1} f + \int_{\varphi\circ\gamma_2} f.$$

*Beweis.* Wir parametrisieren $\gamma^{-1}$ durch $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, $t \in [0,1]$. Dann ist $(\gamma^{-1})'(t) = -\gamma'(1-t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\circ\gamma^{-1}} f &= \int_0^1 f(\varphi(\gamma^{-1}(t)))D\varphi(\gamma^{-1}(t))(\gamma^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^1 f(\varphi(\gamma(1-t)))D\varphi(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^1 f(\varphi(\gamma(t)))D\varphi(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi\circ\gamma} f.\end{aligned}$$

Wir parametrisieren $\gamma_1\gamma_2$ durch

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases}\gamma_1(t) & t \in [0,1] \\ \gamma_2(t-1) & t \in [1,2]\end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\circ(\gamma_1\gamma_2)} f &= \int_0^2 f(\varphi(\gamma_1\gamma_2(t)))D\varphi(\gamma_1\gamma_2(t))(\gamma_1\gamma_2)'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 f(\varphi(\gamma_1(t)))D\varphi(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\varphi(\gamma_2(t)))D\varphi(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\varphi\circ\gamma_1} f + \int_{\varphi\circ\gamma_2} f.\end{aligned}$$

□

**Satz 5.** *Seien $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $Q \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Rechteck mit Randkurve $\gamma$ und $\varphi\colon Q \longrightarrow U$ stetig differenzierbar im reellen Sinn. Dann gilt*

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = 0.$$

*Beweis.* Für alle geschlossenen Integrationswege $\widetilde{\gamma}$ in $U$ und $z_0 \in U$ gilt wieder wie in Satz 1

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f = \int_{\widetilde{\gamma}} \chi_{z_0}.$$

Wir schneiden $Q$ in vier Teile $O_1$, $P_1$, $Q_1$ und $R_1$ mit Randkurven $\partial O_1$, $\partial P_1$, $\partial Q_1$ und $\partial R_1$, siehe Abbildung 5. Es gilt nach Lemma 4, dass

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = \int_{\varphi\circ\partial O_1} f + \int_{\varphi\circ\partial P_1} f + \int_{\varphi\circ\partial Q_1} f + \int_{\varphi\circ\partial R_1} f.$$

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $Q_1$ das Integral

$$\int_{\varphi\circ\partial Q_1} f$$

unter $O_1$, $P_1$, $Q_1$ und $R_1$ maximiert und schreiben $\gamma_1 = \partial Q_1$. Wir erhalten

$$\Big|\int_{\varphi\circ\gamma} f\Big| \leq 4\Big|\int_{\varphi\circ\gamma_1} f\Big|$$

und wie in Satz 1 erhalten wir induktiv eine Folge

$$Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq Q_3 \supsetneq \cdots \supsetneq Q_n \supsetneq \cdots$$

von Rechtecken mit Randkurven $\partial Q_i = \gamma_i$, so dass gilt

$$\Big|\int_{\varphi\circ\gamma} f\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\varphi\circ\gamma_n} f\Big| = 4^n\Big|\int_{\varphi\circ\gamma_n} \chi_{z_0}\Big|,$$

wobei

$$\left|\frac{\chi_{z_0}(z)}{z-z_0}\right| \xrightarrow{z\to z_0} 0.$$

Sei $(\omega_n) \subset Q$ die Folge der Mittelpunkte von $Q_n$. Wie in Satz 1 haben wir, dass $Q_n$ Durchmesser $2^{-n}\rho$ und Umfang $2^{-n}\ell$ hat, mit $\rho$ der Durchmesse und $\ell$ der Umfang von $Q$. Also ist $(\omega_n)$ eine Cauchyfolge. Sei $\omega_0 \in Q$ der Grenzwert von $\omega_n$. Sei $z_0 = \varphi(\omega_0) \in \varphi(Q)$. Wir haben

$$\Big|\int_{\varphi\circ\gamma} f\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\varphi\circ\gamma_n} \chi_{z_0}\Big|.$$

Wegen Lemma 3 haben wir $|\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)| \leq \alpha|\omega - \omega_0|$ für ein $\alpha \geq 0$. Insbesondere ist $|\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)| \leq \alpha|\omega - \omega_0| \leq 2^{-n}\rho\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in Q_n$. Es folgt $|z - z_0| \leq \alpha\rho 2^{-n}$ für alle $z \in \varphi(Q_n)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|\chi_{z_0}(z)| < \varepsilon|z - z_0| \leq \varepsilon\alpha\rho 2^{-n}$ für alle $z \in \varphi(Q_n)$. Insgesamt folgt

$$\Big|\int_{\varphi\circ\gamma} f\Big| \leq 4^n \cdot 2^{-n}\varepsilon\alpha\rho\,\mathrm{L}(\varphi\circ\gamma_n) \leq \varepsilon\alpha^2\rho\ell \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \qquad \square$$

**Korollar 6.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\alpha, \beta\colon [0,1] \longrightarrow U$ stetig differenzierbar, so dass die Verbindungsstrecken zwischen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$ ganz in $U$ liegen. Dann gilt*

$$\int_\alpha f + \int_{h_1} f - \int_\beta f - \int_{h_0} f = 0,$$

*wobei $h_i\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $h_i(\tau) = (1-\tau)\alpha(i) + \tau\beta(i)$.*

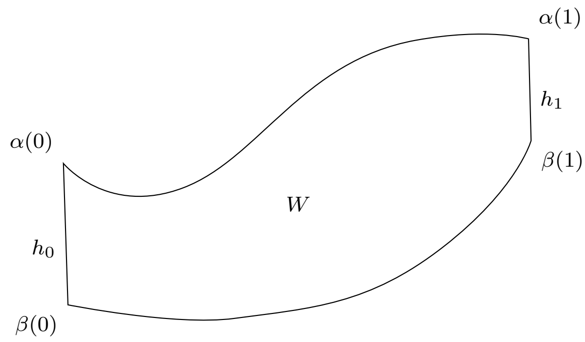


Abbildung 8: Die Situation von Korollar 6

*Beweis.* Es ist zu zeigen, siehe Abbildung 8, dass

$$\oint_{\partial W} f = 0.$$

Sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck. Wir werden eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon Q \longrightarrow U$ mit $\varphi(Q) = W$ und $\varphi(\partial Q) = \partial W$ finden. Wir setzen

$$\varphi(x + iy) = (1 - y)\alpha(x) + y\beta(x).$$

Da $[\alpha(t), \beta(t)] \subset U$ für alle $t \in [0,1]$ ist tatsächlich $\varphi(Q) \subset U$. Sei $\gamma = \partial Q$ und schreibe $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, siehe Abbildung 9, wobei $\gamma_i$ als $\gamma_i\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ parametrisiert seien. Explizit ist $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = 1 + it$, $\gamma_3(t) = (1 - t) + i$ und $\gamma_4(t) = t\alpha(0) + (1 - t)\beta(0)$; also $\varphi \circ \gamma_1(t) = \alpha(t)$, $\varphi \circ \gamma_2(t) = h_1(t)$, $\varphi \circ \gamma_3(t) = \beta(1 - t)$ und $\varphi \circ \gamma_4(t) = h_0(1 - t)$. Es folgt aus Satz 5, dass

$$0 = \int_{\varphi\circ\gamma} f = \int_\alpha f + \int_{h_1} f + \int_{\beta^{-1}} f + \int_{h_0^{-1}} f. \qquad \square$$

**Beispiel 7.** Sei immer $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck mit Randkurve $\gamma$. Dann ist

$$\int_\gamma f = 0,$$

denn wähle in Korollar 6 $\alpha, \beta\colon [0,1] \longrightarrow U$ mit $\alpha(0) = \beta(0)$.

(ii) Seien $\alpha, \beta\colon [0,1] \longrightarrow U$ stetig differenzierbar mit $[\alpha(t), \beta(t)] \subset U$ für alle $t \in [0,1]$ und $\alpha(0) = \beta(0)$ und $\alpha(1) = \beta(1)$. Dann gilt

$$\int_\alpha f = \int_\beta f.$$

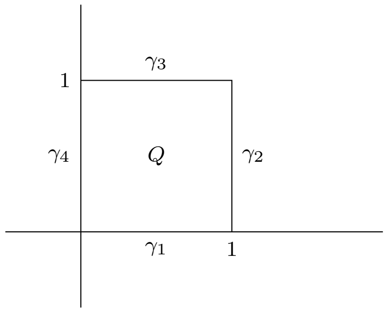


Abbildung 9: Zum Beweis von Korollar 6

(iii) Seien $\alpha, \beta\colon [0,1] \longrightarrow U$ stetig differenzierbare geschlossene Kurven, so dass wieder $[\alpha(t), \beta(t)] \subset U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\int_\alpha f = \int_\beta f.$$

(iv) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > r > 0$. Seien $\alpha(t) = z_0 + r\exp(2\pi i t)$ und $\beta(t) = z_0 + R\exp(2\pi i t)$ für $t \in [0,1]$ so, dass der Kreisring, der durch $\alpha$ und $\beta$ begrenzt wird, ganz in $U$ liegt. Dann gilt

$$\int_\alpha f = \int_\beta f.$$

(v) Gilt $\overline{U_R(z_0)} \subset U$, so ist

$$\int_{|z-z_0|=R} f = 0,$$

denn aus (iv) folgt, dass

$$\Big| \int_{|z-z_0|=R} f \Big| = \Big| \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f \Big| \leq 2\pi\varepsilon \sup_{z \in \overline{U_R(z_0)}} |f(z)| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

wobei $\varepsilon \in (0, R)$.

# 5 Erste Folgerungen aus dem Integralsatz von Cauchy

## 5.1 Integralformel von Cauchy

**Satz 1** (Integralformel von Cauchy)**.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt für alle $a \in U_r(z_0)$, dass*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(r)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

*Beweis.* Sei $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(a, \partial U_r(z_0)))$. Dann gilt

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z,$$

denn $f(z)/(z-a)$ ist holomorph auf $U \setminus \{a\}$. Wir definieren $g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \in U \setminus \{a\} \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

Dann ist $g$ eine stetige Funktion und wir haben

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

und es gilt

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z + f(a) \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Parametrisiert man die Kreislinie $\partial U_\varepsilon(a)$ als $\gamma_\varepsilon(t) = a + \varepsilon \exp(2\pi i t)$, $t \in [0,1]$, so erhält man

$$f(a) \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = f(a) \int_0^1 \frac{2\pi i \varepsilon \exp(2\pi i t)}{\varepsilon \exp(2\pi i t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi i f(a).$$

Ferner ist

$$\Big| \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z \Big| = \Big| \int_{|z-a|=\varepsilon} g \Big| \le 2\pi\varepsilon \sup_{z \in \overline{U_r(z_0)}} |g(z)| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

□

**Satz 2** (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(it))\,\mathrm{d}t,$$

*d.h. $f(z_0)$ ist gleich dem Mittelwert von $f$ auf der Kreislinie mit Radius $r$ um $z_0$.*

*Beweis.* Wähle $a = z_0$ in Satz 1. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(it))\,\mathrm{d}t$$

mit der Parametrisierung $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, von $\partial U_r(z_0)$. □

## 5.2 Potenzreihenentwicklungssatz

**Satz 3.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$. Dann gilt:*

(i) *Es existiert genau eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ mit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

*für alle $z$ innerhalb des Konvergenzradius $\rho_{z_0} \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$. Ferner gilt*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z, \tag{$*$}$$

*sofern $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset U$ ist. Die Gleichung $(*)$ heißt* verallgemeinerte Integralformel von Cauchy*.*

(ii) *Die Funktion $f$ ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$.*

*Beweis.* Ist $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in U_r(z_0)$ mit $r < \rho_{z_0}$, so ist $f$ beliebig oft differenzierbar mit $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$. Es folgt Aussage (ii) und, dass die Potenzreihendarstellung von $f$, wenn sie existiert, eindeutig ist.

Sei $0 < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$ und $\gamma_r$ die Randkurve von $U_r(z_0)$. Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\eta-z_0}} \,\mathrm{d}\eta.$$

Es gilt $|z-z_0| < |\eta - z_0| = r$. Es folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} \left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^n \mathrm{d}\eta.$$

Da $f$ auf $\overline{U_r(z_0)}$ stetig ist, erhalten wir

$$\left|\frac{f(\eta)}{\eta - z_0} \left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^n\right| \leq |f(\eta)| \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}} \leq \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}} \sup_{\eta \in \overline{U_r(z_0)}} |f(\eta)|,$$

also gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf $\overline{U_r(z_0)}$, d.h. es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\eta \; (z-z_0)^n.$$

□

**Satz 4.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Wir setzen $\kappa = \sup\{|f(z)| \colon z \in \overline{U_r(z_0)}\}$. Dann gilt*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\kappa}{r^n}.$$

*Beweis.* Es gilt
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$
□

**Satz 5** (Liouville)**.** *Ist $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist $f$ konstant.*

*Beweis.* Es gilt
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\kappa}{r^n} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$
für $\kappa = \sup\{|f(z)|\colon z \in \mathbb{C}\} < \infty$ nach Satz 4. □

**Lemma 6.** *Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom von Grad $n$ mit Leitkoeffizient $a_n$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\rho_\varepsilon > 0$, so dass*
$$(1-\varepsilon)|a_n z^n| \leq |p(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n z^n|$$
*für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U_{\rho_\varepsilon}(0)$.*

*Beweis.* Sei $p(z) = \sum a_k z^k$ und $\widetilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Die Behauptung folgt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\rho_\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$|\widetilde{p}(z)| \leq \varepsilon |a_n z^n|$$
für $|z| > \rho_\varepsilon$, denn $p(z) = \widetilde{p}(z) + a_n z^n$ und es gilt
$$(1-\varepsilon)|a_n z^n| \leq |p(z)| \leq |\widetilde{p}(z)| + |a_n z^n| \leq (1+\varepsilon)|a_n z^n|$$
für $|z| > \rho_\varepsilon$.

Für $|z| \geq 1$ erhalten wir
$$|\widetilde{p}(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z^k| \leq |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = \left(\frac{1}{|z||a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) |a_n||z|^n.$$
Sei $\varepsilon > 0$. Für $|z|$ groß genug ist dann $|\widetilde{p}(z)| \leq \varepsilon |a_n z^n|$. □

**Satz 7** (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nichtkonstante Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

*Beweis.* Wir nehmen an, ein nichtkonstantes Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ hätte keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist $1/p(z)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Nach Lemma 6 existieren $\rho, \kappa > 0$ so dass $|p(z)| \geq \kappa |a_n z^n|$ für alle $|z| > \rho$, wobei $a_n$ der Leitkoeffizient von $p(z)$ sei. Dann ist
$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{\kappa |a_n||z^n|} \leq \frac{1}{\rho^n \kappa |a_n|}$$
für $|z| > \rho$, d.h. $1/p(z)$ ist beschränkt und holomorph auf $\mathbb{C}$ also konstant nach Satz 5, im Widerspruch zur Annahme, dass $p(z)$ nichtkonstant sei. □

## 5.3 Der Satz von Morera und Anwendungen

**Satz 8** (Morera)**.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0,$$

*so ist $f$ auf $U$ holomorph.*

*Beweis.* Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, genügt es den Satz auf einer Kreisscheibe zu zeigen. Sei $z_0 \in U$ und $r > 0$, so dass $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Wir zeigen, dass ein holomorphes $F\colon U_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$. Für jedes $z \in U_r(z_0)$ definieren wir

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f.$$

Es gilt für $z, w \in U_r(z_0)$, dass

$$F(z) + \int_{[z,w]} f - F(w) = 0.$$

Es folgt, dass

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f = \int_0^1 f((1-t)z + tw)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{w \to z} f(z). \qquad \square$$

**Satz 9.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Konvergiert $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig auf $U$ gegen $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, so ist $f$ holomorph.*

*Beweis.* Es ist klar, dass $f$ auf $U$ stetig ist. Sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Wegen $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $\overline{U_r(z_0)}$ gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset \overline{U_r(z_0)}$, dass

$$\int_{\partial\Delta} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n = 0. \qquad \square$$

**Satz 10.** *Seien $f_n\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f_n \longrightarrow f$ lokal gleichmäßig auf $U$. Dann gilt auch $f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf $U$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass $f_n' \longrightarrow f'$ lokal gleichmäßig auf $U$, und dafür genügt es zu zeigen, dass für jedes $z_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, so dass $f_n' \longrightarrow f'$ gleichmäßig auf $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_{2r}(z_0)} \subset U$. Dann gilt $\overline{U_r(z)} \subset U$ für alle $z \in U_r(z_0)$. Es folgt für alle $z \in U_r(z_0)$, dass

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z| = r} \frac{f_n(\eta) - f(\eta)}{(\eta - z)^2}\,\mathrm{d}\eta.$$

Also gilt

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\eta - z| = r} \frac{|f_n(\eta) - f(\eta)|}{|\eta - z|^2} \,\mathrm{d}\eta \leq \frac{1}{2\pi r^2} 2\pi r \sup_{\eta \in \partial U_r(z)} |f_n(\eta) - f(\eta)| \leq$$
$$\leq \frac{1}{r} \sup_{\eta \in \overline{U_{2r}(z_0)}} |f_n(\eta) - f(\eta)|,$$

und es folgt, dass

$$\sup_{z \in \overline{U_r(z_0)}} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{r} \sup_{\eta \in \overline{U_{2r}(z_0)}} |f_n(\eta) - f(\eta)| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \qquad \square$$

**Definition 11.** Sei $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\widetilde{f} \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $V \supsetneq U$. Wir nennen $\widetilde{f}$ eine *Fortsetzung* von $f$, wenn $\widetilde{f}|_U = f$. Ist in diesem Fall $\widetilde{f}$ holomorph, so ist $\widetilde{f}$ eine *holomorphe Fortsetzung* oder auch *analytische Fortsetzung* von $f$.

Die Funktion $f \colon U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}$$

ist holomorph auf $U_1(0)$ und besitzt eine stetige Fortsetzung auf $\overline{U_1(0)}$, aber lässt sich nicht außerhalb von $\overline{U_1(0)}$ holomorph fortsetzen.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich $\mathbb{R}$, d.h. genau dann ist $z \in U$, wenn $\overline{z} \in U$. Wir setzen

$$\begin{aligned} U^+ &:= \{z \in U \colon \operatorname{Im}(z) > 0\}, \\ U^0 &:= U \cap \mathbb{R}, \\ U^- &:= \{z \in U \colon \operatorname{Im}(z) < 0\}. \end{aligned}$$

**Satz 12** (Spiegelungsprinzip von Schwarz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich $\mathbb{R}$. Sei $f \colon U^+ \cup U^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig auf $U^+ \cup U^0$ und holomorph auf $U^+$ so, dass $f(U^0) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\widetilde{f} \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in U^+ \cup U^0 \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in U^- \end{cases}$$

*holomorph.*

*Beweis.* Natürlich ist $\widetilde{f}|_{U^0 \cup U^+}$ stetig. Dann gilt für alle $x \in U^0$, dass

$$\lim_{y \to 0^+} f(x + iy) = f(x),$$

also
$$\lim_{y\to 0^+} \widetilde{f}(x-iy) = \lim_{y\to 0^+} \overline{f(x+iy)} = \overline{f(x)} = f(x).$$
Also ist sogar ganz $\widetilde{f}$ stetig.

Weiterhin ist $\widetilde{f}|_{U^-}$ holomorph, denn sei $z \in U^-$. Dann ist $\overline{z} \in U^+$ und man hat eine Darstellung
$$f(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\overline{z} - \overline{z_0})^n$$
lokal um $\overline{z_0} \in U^+$. Es folgt, dass
$$\widetilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}(z - z_0)^n,$$
d.h. $\widetilde{f}$ ist analytisch auf $U^-$.

Sei nun $x_0 \in U_0$ und $r > 0$ so, dass $U_r(x_0) \subset U$. Sei $\Delta \subset U_r(x_0)$ ein abgeschlossenes Dreieck. Nach dem Satz von Morera genügt es zu zeigen, dass $\int_{\partial\Delta} \widetilde{f} = 0$. Ist $\Delta \subset U^+ \cup U^-$, so folgt das aus der Holomorphie von $\widetilde{f}$ auf $U^+ \cup U^-$. Sei also $\Delta \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Wir schreiben $\Delta = A \cup B \cup C \cup D$ wie in (Abbildung). Dann ist
$$\int_{\partial\Delta} \widetilde{f} = \int_{\partial A} \widetilde{f} + \int_{\partial B} \widetilde{f} + \int_{\partial C} \widetilde{f} + \int_{\partial D} \widetilde{f} = \int_{\partial B} \widetilde{f} + \int_{\partial C} \widetilde{f}.$$
Wir schreiben $\partial C = \beta^{-1} k \alpha h$, siehe (noch eine Abbildung).

Seien $\alpha_n \colon [0,1] \longrightarrow U_r(x_0)$ so, dass $\alpha_n \longrightarrow \beta$ und $\alpha_n' \longrightarrow \beta'$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Es gilt $\mathrm{L}(\alpha_n) = |\alpha_n(1) - \alpha_n(0)| \longrightarrow |\beta(1) - \beta(0)| = \mathrm{L}(\beta)$. Wir zeigen, dass $\widetilde{f} \circ \alpha_n \longrightarrow \widetilde{f} \circ \beta$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Dies folgt, da $\widetilde{f}$ auf $\overline{U_r(x_0)}$ stetig, also sogar wegen Kompaktheit auf $\overline{U_r(x_0)}$ gleichmäßig stetig ist. Es gilt mit $\kappa = \sup\{|\widetilde{f}(z)| \colon z \in \overline{U_r(x_0)}\}$, dass
$$\Big| \int_{k_n} \widetilde{f} \Big| \leq \kappa |\alpha_n(0) - \beta(0)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
und analog für $h_n$. Außerdem gilt
$$\int_{\alpha_n} \widetilde{f} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\beta} \widetilde{f}$$
wegen der gleichmäßigen Konvergenz. Insgesamt folgt
$$\int_{\partial C_n} = \int_{k_n} \widetilde{f} + \int_{\alpha_n} \widetilde{f} + \int_{h_n} \widetilde{f} - \int_{\beta} \widetilde{f} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \square$$

**Bemerkung 13.** Falls $U$ ein Gebiet ist, werden wir sehen, dass $\widetilde{f}$ die einzige holomorphe Fortsetzung von $f$ auf $U$ ist.

## 5.4 Identitätssatz

Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

lokal um jedes $z_0 \in U$ mit $n! a_n = f^{(n)}(z_0)$. Ist $f(z_0) = 0$, so ist

$$f(z) = (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n,$$

also $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} 0$ mindestens linear. Die Konvergenz könnte aber schneller sein. Dies motiviert folgende

**Definition 14.** Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$. Man sagt, $f$ hat in $z_0 \in U$ eine *Nullstelle der Ordnung* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k < n$ und, wenn $n < \infty$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

**Bemerkung 15.** Die Funktion $(z - z_0)^n$ hat in $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $n$.

**Satz 16.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann sind äquivalent:*

(i) *Die $f$ hat in $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $n$.*

(ii) *Es gilt*

$$f(z) = \sum_{k \geq n} a_k (z - z_0)^k$$

*lokal um $z_0$ mit $a_n \neq 0$.*

(iii) *Es existiert ein $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset U$ und ein holomorphes $g\colon U_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ für alle $z \in U_r(z_0)$.*

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist trivial. Man beobachte

$$f(z) = \sum_{k \geq n} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k \geq n} a_k (z - z_0)^{k-n},$$

was die Äquivalenz von (ii) und (iii) zeigt. □

**Satz 17** (Identitätssatz)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt $f = 0$.*

(ii) *Es gibt mindestens eine Nullstelle der Ordnung $\infty$ von $f$ in $G$.*

(iii) *Die Menge der Nullstellen von $f$ in $G$ besitzt einen Häufungspunkt.*

*Beweis.* $a \Rightarrow b$ und $a \Rightarrow c$ sind trivial. Wir zeigen: $c \Rightarrow b$ und $b \Rightarrow a$. Sei $f = 0$ auf $N$ und sei $z_0 \in N$ ein Häufungspunkt von $N$, d.h. $\exists (z_n) \subset N$ mit $z_n \longrightarrow z_0$, $f(z_n) = 0$ und $f(z_0) = 0$. Wir wissen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

lokal um $z_0$. Wegen $f(z_0) = 0$ ist $a_0 = 0$. Wir wollen induktiv zeigen, dass $f^{(k)}(z_0) = 0$, also $a_k = 0$, für jedes $k$. Nehmen wir für den Induktionsschritt an, dass $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $0 \leq k \leq j-1$. Dann ist

$$0 = \sum_{k \geq j} a_k (z_n - z_0)^k \Big/ \frac{1}{(z_n - z_0)^j}$$

also

$$0 = a_j + \sum_{k \geq j+1} \underbrace{a_k (z_n - z_0)^{k-j}}_{\longrightarrow 0}$$

Jetzt zeigen wir $b \Rightarrow a$. Sei $M = \{z \in G \mid f^{(k)}(z) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Diese Menge ist offen, denn sei $z_0 \in M$. Da $G$ offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in U_r(z_0)$. Aber $n! a_n = f^{(n)}(z_0) = 0$, d.h. $U_r(z_0) \subset M$. Die Menge $M$ ist auch abgeschlossen, denn

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(f^{(k)}\right)^{-1}(\{0\}).$$

Da $G$ zusammenhängend ist, ist also $M = G$, insbesondere $f = 0$. $\square$

**Bemerkung 18.**

(i) Ein Punkt $z_0 \in N$ ist ein Häufungspunkt von $N$, wenn eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N$ existiert mit $z_n \neq z_0$ für alle $n$ und $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0$.

(ii) Ist $f$ auf $U_2(0)$ holomorph und $f(2^{-n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

(iii) Eine holomorphe Funktion $f$ auf einem Gebiet $G$ wird durch ihre Werte auf einer sehr kleinen Teilmenge von $G$ vollständig festgelegt.

(iv) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $\mathbb{R}$ symmetrisches Gebiet. Seien $f \colon U^+ \cup U^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\widetilde{f} \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ wie in Satz 12. Dann ist $\widetilde{f}$ die einzige holomorphe Fortsetzung von $f$ auf $U$.

## 5.5 Satz von der Gebietstreue und Maximumsprinzip

**Lemma 19.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(z_0)} \subset U$. Falls*

$$|f(z_0)| < \min_{z \in \partial U_r(z_0)} |f(z)|, \tag{$*$}$$

*so folgt, dass $f$ auf $U_r(z_0)$ eine Nullstelle hat.*

*Beweis.* Gilt $(*)$, so ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial U_r(z_0)$. Angenommen, $f$ hätte keine Nullstelle auf $U_r(z_0)$. Dann existiert eine offene Menge $\widetilde{U} \subset U$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset \widetilde{U}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \widetilde{U}$. Also ist $1/f$ auf $\widetilde{U}$ holomorph. Aus der Integralformel von Cauchy folgt

$$\left|\frac{1}{f(z_0)}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_r(z_0)} \frac{1}{f(\eta)(z_0-\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right| \leq \max_{\eta \in \partial U_r(z_0)} \frac{1}{|f(\eta)|},$$

d.h. nach Invertieren gilt

$$|f(z_0)| \geq \min_{z \in \partial U_r(z_0)} |f(z)|$$

im Widerspruch zu $(*)$. □

**Satz 20** (Gebietstreue)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant. Dann ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.*

*Beweis.* Das Bild $f(G)$ ist zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass $f(G)$ offen ist. Sei $\omega_0 \in f(G)$, etwa $f(z_0) = \omega_0$. Da $f$ nichtkonstant ist, existiert nach dem Identitätssatz ein $\rho > 0$ mit $|f(z) - \omega_0| > 0$ für alle $z \in \dot{U}_{2\rho}(z_0)$. Insbesondere existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(z) - \omega_0| \geq 3\varepsilon$ für alle $z \in \partial U_\rho(z_0)$. Wir werden zeigen, dass $U_\varepsilon(\omega_0) \subset f(G)$. Sei dazu $\omega \in \dot{U}_\varepsilon(\omega_0)$. Es gilt für $z \in \partial U_\rho(z_0)$, dass

$$|f(z) - \omega| \geq |f(z) - \omega_0| - |\omega_0 - \omega| \geq 2\varepsilon.$$

Andererseits gilt

$$|f(z_0) - \omega| \leq |f(z_0) - \omega_0| + |\omega_0 - \omega| < \varepsilon.$$

Zusammen folgt, dass

$$|f(z_0) - \omega| < \varepsilon < \min_{\partial U_\rho(z_0)} |f(z) - \omega|.$$

Aus Lemma 19 folgt, dass ein $z \in U_\rho(z_0)$ existiert mit $f(z) = \omega$, d.h. $\omega \in f(G)$. □

**Bemerkung 21.** Sei $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}(f)$ konstant oder $\mathrm{Im}(f)$ konstant. Dann ist $f$ konstant.

**Satz 22** (Maximumsprinzip)**.** *Sei $G$ ein Gebiet und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) *Hat $|f|$ im Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist $f$ konstant.*

(ii) *Sei ferner angenommen, dass $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ beschränkt und $f$ auf $\overline{G}$ stetig fortsetzbar ist. Dann ist*

$$|f(z)| \leq \max_{\omega \in \partial G} |f(\omega)|$$

*für alle $z \in G$.*

*Beweis.* Die Aussage (ii) ist eine einfache Folgerung aus (i). Hat $|f|$ ein lokales Maximum im Punkt $z_0 \in G$, so existiert ein $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset G$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in \overline{U_r(z_0)}$. Nach Satz 20 ist $f(U_r(z_0))$ ein Gebiet und natürlich ist $f(z_0) \in f(U_r(z_0))$. Dann existiert aber $\omega \in f(U_r(z_0))$ mit $|w| > |f(z_0)|$. Aber das widerspricht der Annahme, $|f|$ habe ein lokales Maximum im Punkt $z_0 \in G$. $\square$

**Satz 23** (Lemma von Schwarz)**.** *Sei $f\colon U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$.*

(i) *Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$.*

(ii) *Gibt es ferner ein $z_0 \in \dot{U}_1(0)$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist $f$ eine Drehung, d.h. es existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\theta} z$.*

*Beweis.* Wegen $f(0) = 0$ ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z g(z)$$

für alle $z \in U_1(0)$ mit einer holomorphen Funktion $g\colon U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt $f'(z) = g(z) + z g'(z)$, also $f'(0) = g(0)$. Ist $|z| = r < 1$, so gilt

$$1 \geq |f(z)| = |z||g(z)| = r|g(z)|,$$

d.h. $|g(z)| \leq 1/r$ für alle $z \in \partial U_r(0)$, $0 < r < 1$. Die Funktion ist auf $\overline{U_r(0)}$ stetig, d.h. nach Satz 5.5 ist

$$|g(z)| \leq \max_{z \in \partial U_r(0)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Mit $r \to 1$ erhält man $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in U_1(0)$. Es folgt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in U_1(0)$.

Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so ist $|g(z_0)| = 1$ und aus dem Maximumsprinzip folgt, dass $g$ auf $U_1(0)$ konstant mit Betrag 1 ist. Also existiert ein $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $g(z) = e^{i\theta}$. Gilt $|f'(0)| = 1$, so ist $|g(0)| = 1$ und es gilt wieder $g(z) = e^{i\theta}$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$. $\square$

## 5.6 Reell analytische Funktionen

**Definition 24.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion $f$ heißt *reell analytisch* im Punkt $x_0 \in I$, falls eine Reihe $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius und ein $r > 0$ existiert mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

**Bemerkung 25.**
(i) Ist $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ reell analytisch, so folgt $f \in C^\infty(I)$.
(ii) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, d.h. $C^\omega(I) \subsetneq C^\infty(I)$.

**Beispiel 26.** Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist glatt mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Taylorentwicklung von $f$ in 0 konstant 0, aber $f(x) \neq 0$ für $x > 0$. Also ist $f$ nicht analytisch in 0.

**Satz 27.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ hat genau dann eine holomorphe Fortsetzung $F$, wenn sie reell analytisch ist.*

*Beweis.* Die Richtung „⇒“ ist trivial. Sei $f$ also reell analytisch. Für alle $x \in I$ existiert ein $\rho(x) > 0$ mit $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x)^n$ für alle $y \in (x - \rho(x), x + \rho(x))$. Für jedes $x \in I$ definieren wir

$$F_x\colon B_x = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \rho(x)\} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad F_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x)^n$$

$F_x$ ist holomorph, denn die Potenzreihe konvergiert für $|z-x| < \rho(x)$, und $F_x|_{B_x \cap \mathbb{R}} = f|_{(x-\rho(x), x+\rho(x))}$. Wir erhalten eine Familie holomorpher Funktionen $\{F_x\}_{x \in I}$. Wir definieren

$$F\colon U := \bigcup_{x \in I} B_x \longrightarrow \mathbb{C} \qquad F(z) = F_x(z), \quad z \in B_x$$

Um zu zeigen, dass $F$ wohldefiniert ist, sei $z \in B_{x_1} \cap B_{x_2}$ mit $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$. Wir haben $F(z) = F_{x_1}(z)$ und $F(z) = F_{x_2}(z)$. Weil die $F_x$ auf entsprechende Intervalle in $\mathbb{R}$ eingeschränkt mit $f$ übereinstimmen, ist $F_{x_1}|_{B_1 \cap B_2 \cap \mathbb{R}} = F_{x_2}|_{B_1 \cap B_2 \cap \mathbb{R}}$. Nach dem Identitätssatz ist damit $F_x = F_y$ auf $B_1 \cap B_2$. Also ist $F$ wohldefiniert und der Satz bewiesen. $\square$

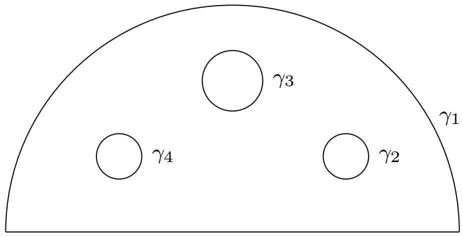


Abbildung 10: Ein Gebiet $W$

# 6 Der globale Integralsatz von Cauchy

Wir bereits gezeigt, dass für holomorphe Funktionen $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ das Integral $\int_\gamma f$ verschwindet für geschlossene Kurven $\gamma$, die Bild einer Randkurve eines Rechtecks unter einer stetig differenzierbaren Funktion sind. Wir werden dieses Resultat auf weniger spezielle Kurven verallgemeinern.

## 6.1 Die Umlaufzahl

**Definition 1.** Unter einem *Zyklus* $\Gamma$ verstehen wir eine formale Linearkombination

$$\Gamma = \sum_i \lambda_i \gamma_i$$

von geschlossenen Integrationswegen mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Ist nun $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so schreiben wir

$$\int_\Gamma f \coloneqq \sum_i \lambda_i \int_{\gamma_i} f,$$

falls $\operatorname{im}\gamma \coloneqq \bigcup_i \operatorname{im}\gamma_i \subset U$.

**Beispiel 2.** Sei $W$ wie in Abbildung 10. Wir sagen, dass

$$\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$$

der *Randzyklus* von $W$ ist.

**Definition 3.** Sei $\Gamma$ ein Zyklus und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$. Dann ist *Umlaufzahl* von $\Gamma$ um $z_0$ durch

$$n(\Gamma, z_0) \coloneqq \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\eta - z_0}\,\mathrm{d}\eta.$$

**Bemerkung 4.**
(i) Die Zahl $n(\Gamma, z_0)$ soll messen, wie oft der Zyklus $\Gamma$ den Punkt $z_0$ umläuft.

(ii) Wir werden sehen, dass für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$ die $m$–fache Kreislinie $\gamma_m(t) = z_0 + \rho \exp(imt)$, $t \in [0, 2\pi]$, die Umlaufzahlen

$$n(\gamma_m, z) = \begin{cases} m & |z - z_0| < \rho \\ 0 & |z - z_0| > \rho \end{cases}$$

hat

(iii) Sei $\Gamma$ ein Zyklus mit $\Gamma = \sum_{j=1}^k \lambda_j \gamma_j$. Dann ist $n(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^k \lambda_j n(\gamma_j, z)$.

**Satz 5.** *Sei $\Gamma$ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma$. Dann ist $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Die Idee ist zu zeigen, dass $\exp(2\pi n(\Gamma, z) i) = 1$ ist. Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^k \lambda_j \gamma_j$ eine endliche Linearkombination mit $\gamma_j \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$. Sei

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k \lambda_j \int_0^t \frac{\gamma_j'(s)}{\gamma_j(s) - z} \,\mathrm{d}z$$

für $t \in [0,1]$. Dann ist $h$ stückweise stetig differenzierbar mit

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t) - z}$$

Ebenfalls ist

$$g(t) = e^{-2\pi i h(t)} \prod_{j=1}^k (\gamma_j(t) - z)^{\lambda_j}$$

stückweise stetig differenzierbar mit

$$g'(t) = -2\pi i h'(t) g(t) + e^{-2\pi i h(t)} \sum_{\ell=1}^k \frac{\lambda_\ell \gamma_\ell'(t)}{\gamma_\ell(t) - z} \prod_{j=1}^k (\gamma_j(t) - z)^{\lambda_j} = 0.$$

Dann ist $g$ stetig differenzierbar auf $[0,1]$ mit $g' = 0$, d.h. $g$ ist konstant, etwa $g(t) = C$ für alle $t$. Es gilt

$$C e^{2\pi i h(t)} = \prod_{j=1}^k (\gamma_j(t) - z)^{\lambda_j} \neq 0$$

und es folgt $C \neq 0$. Da die Kurven $\gamma_j$ geschlossen sind, gilt $\gamma_j(1) = \gamma_j(0)$ und es folgt $e^{2\pi i h(1)} = e^{2\pi i h(0)} = 1$. □

**Satz 6.** *Die Umlaufzahl ist als Abbildung*

$$n(\Gamma, -) \colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$$

*stetig.*

*Beweis.* Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\Gamma$ und $d = \operatorname{dist}(z, \operatorname{im}\Gamma) > 0$. Sei $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$ mit $z_n \longrightarrow z$ für $n \to \infty$. Dann existiert ein $N_0 > 0$, so dass $\operatorname{dist}(z_n, \operatorname{im}\Gamma) > d/2$ für alle $n \geq N_0$. Es folgt

$$\begin{aligned}|n(\Gamma, z) - n(\Gamma, z_n)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left| \int_{\gamma_j} \frac{z - z_n}{(\eta - z)(\eta - z_n)} \,\mathrm{d}\eta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| |z - z_n| \frac{2}{d^2} \,\mathrm{L}(\gamma_j) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

für $n > N_0$. ☐

**Korollar 7.** *Sei $\Gamma$ ein Zyklus, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und die Umlaufzahl $n(\Gamma, -)\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}$ erklärt. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{Z}$ mit $n(\Gamma, z) = K$ für alle $z \in G$.*

*Beweis.* Die Funktion $n(\Gamma, -)$ ist lokal konstant, da sie stetig mit Werten in $\mathbb{Z}$ ist. ☐

**Beispiel 8.** Betrachte die Kurve $\gamma_m(t) = z_0 + \rho e^{imt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sei $G_1$ die umschlossene Kreisscheibe und $G_2$ das Äußere von $\gamma_m$. Wir schreiben $n(\gamma, G_j) := n(\gamma, z)$ für irgendein $z \in G_j$. Das ist wohldefiniert, da $n(\gamma, -)$ lokal konstant ist. Es gilt

$$n(\gamma.G_1) = n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{im\rho e^{imt}}{\rho e^{imt}} \,\mathrm{d}t = m.$$

Sei $z \in G_2$. Dann existiert eine offene Menge $\widetilde{U} \supset \overline{G_1}$ mit $z \notin \widetilde{U}$. Dann ist $\eta \longmapsto 1/(\eta - z)$ holomorph auf $\widetilde{U}$ und deshalb

$$n(\gamma, G_2) = n(\gamma, z) = \int_\gamma \frac{1}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta = 0.$$

**Definition 9.** Sei $\Gamma$ ein Zyklus. Wir definieren das *Innere* von $\Gamma$ als

$$\operatorname{Int}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\Gamma) \colon n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

und das *Äußere* von $\Gamma$ als

$$\operatorname{Ext}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\Gamma) \colon n(\gamma, z) = 0\}.$$

**Bemerkung 10.** Da $n(\Gamma, -)$ lokal konstant ist, sind $\operatorname{Int}(\Gamma)$ und $\operatorname{Ext}(\Gamma)$ offen. Ferner gilt $\mathbb{C} = \operatorname{Int}(\Gamma) \sqcup \operatorname{im}\gamma \sqcup \operatorname{Ext}(\Gamma)$.

## 6.2 Der globale Integralsatz von Cauchy

**Definition 11.** Ein Zyklus $\Gamma$ mit $\operatorname{im}(\gamma) \subset U$, $U$ offen, heißt *nullhomolog* in $U$, wenn für jeden Punkt $z \notin U$ die Umlaufzahl $n(\Gamma, z)$ verschwindet.

**Beispiel 12.** Die Kreislinie $\gamma(t) = \rho e^{it}$ ist nullhomolog in $U_{2\rho}(0)$, aber nicht in $\dot{U}_{2\rho}(0)$.

**Satz 13.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\Gamma$ ein nullhomologer Zyklus in $U$. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f = 0$$

*und für alle $z \in U \setminus \operatorname{im}\Gamma$ ist*

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}} \,\mathrm{d}\eta.$$

*Beweis.* Wir zeigen nur

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta.$$

Der Rest des zweiten Teils folgt dann durch Ableiten und der erste Teil des Satzes folgt mit $F(z) = (z - a) f(z)$, denn dann ist

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\eta - a) f(\eta)}{\eta - a} \,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f.$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$I(z) \coloneqq \int_\Gamma \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta = 0.$$

für alle $z \in U \setminus \operatorname{im}\Gamma$. Sei $g\colon U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(\eta, z) = \begin{cases} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} & \eta \neq z \\ f'(z) & \eta = z. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $g$ stetig ist und dann mittels Fubini und Morera, dass $I$ eine holomorphe Fortsetzung $h\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ hat. Schließlich zeigen wir $h = 0$; damit folgt dann die Behauptung.

Die Funktion $g$ ist stetig außerhalb der Diagonale von $U \times U$. Sei $\eta_0 = z_0 \in U$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f'\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $\overline{U_\delta(z_0)} \subset U$, so dass $|f'(\omega) - f'(z_0)| < \varepsilon$ für alle $\omega \in U_\delta(z_0)$. Seien $\eta, z \in U_\delta(z_0)$ und schreibe $T = g(\eta, z) - g(z_0, z_0)$. Für $\eta = z$ gilt

$$|T| = |f'(\eta) - f'(z_0)| < \varepsilon.$$

Sei also $\eta \neq z$. Dann ist

$$T = \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\eta - z} \int_{[z,\eta]} f'(\omega) - f'(z_0) \,\mathrm{d}\omega,$$

also

$$|T| \leq \sup_{\omega \in [\eta, z]} |f'(\omega) - f'(z_0)| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass $g$ stetig ist. Wir definieren $h_0 \colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h_0(z) = \int_\Gamma g(\eta, z) \,\mathrm{d}\eta.$$

Dann ist $h_0|_{U \smallsetminus \operatorname{im}\Gamma} = I$ und $h_0$ stetig. Sei $\Delta \subset U$ ein abgeschlossenes Dreieck. Es gilt

$$\int_{\partial\Delta} h_0 = \int_{\partial\Delta} \int_\Gamma g(\eta, z) \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \int_{\partial\Delta} g(\eta, z) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\eta$$

nach Fubini. Für festes $\eta \in U$ ist $g(\eta, -)$ holomorph. Also folgt

$$\int_{\partial\Delta} g(\eta, z) \,\mathrm{d}z = 0$$

und nach dem Satz von Morera ist $h_0$ holomorph.

Sei $U_0 = \operatorname{Ext}(\Gamma)$. Dann ist $U_0 \supset \mathbb{C} \smallsetminus U$, $U_0$ offen und $U_0 \cap U \neq \emptyset$. Wir definieren $h_1 \colon U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta.$$

Die Funktion $\widetilde{g} \colon \operatorname{im}(\Gamma) \times U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\widetilde{g}(\eta, z) = f(\eta)/(\eta - z)$ ist stetig, also auch $h_1$. Für festes $\eta \operatorname{im} \operatorname{im}\Gamma$ ist $U_0 \ni z \longmapsto f(\eta)/(\eta - z)$ holomorph. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$ gilt

$$\int_{\partial\Delta} h_1 = \int_\Gamma \int_{\partial\Delta} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\eta = 0,$$

also ist $h_1$ holomorph nach dem Satz von Morera. Für $z \in U_0 \cap U$ gilt

$$h_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta - f(z) n(\Gamma, z) 2\pi i = \int_\Gamma \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta = h_0(z)$$

und wir erhalten eine holomorphe Fortsetzung von $I$ auf ganz $\mathbb{C}$ durch

$$h(z) = \begin{cases} h_1(z) & z \in U_0 \\ h_0(z) & z \in U \end{cases}$$

Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit $|z| \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Sei $\rho > 0$ so groß, dass $\operatorname{im} \Gamma \subset U_\rho(0)$. Dann existiert ein $N_0 > 0$ mit $z_n \notin U_{2\rho}(0)$ für alle $n > N_0$, also ist $n(\Gamma, z_n) = 0$ für $n > N_0$. Es folgt, dass

$$|h(z_n)| = |h_1(z_n)| \leq \mathrm{L}(\Gamma) \sup_{\eta \in \operatorname{im}\Gamma} |f(\eta)| \frac{1}{|\eta - z_n|} \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z_n, \partial U_\rho(z_0))} \sup_{\operatorname{im}\Gamma} |f| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also ist $|h|$ beschränkt auf $\mathbb{C}$, d.h. $h = 0$ nach dem Satz von Liouville. Insbesondere ist $I = 0$ und es folgt der Satz. $\square$

# 7 Der Logarithmus

Gegeben sei eine injektive Abbildung $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist natürlich $f\colon I \longrightarrow f(I)$ bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \longrightarrow I$. Zum Beispiel hat die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion $\log\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, der natürliche Logarithmus. Es gilt also $\log(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist nicht global injektiv, aber für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $k\frac{\pi}{2} \notin I$ ist $\sin|_I$ injektiv. Wir wissen, dass $\sin_k\colon [-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi] \longrightarrow [-1, 1], x \longmapsto \sin(x)$ bijektiv ist mit Umkehrfunktion $\arcsin_k$, dem *$k$–ten Zweig des Arcussinus*. Die Funktion $\arcsin_0 =: \arcsin$ heißt der *Hauptzweig des Arcussinus*.

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ist surjektiv und periodisch. Die Funktion exp ist also nicht global injektiv, es ist $\exp(z) = \exp(w)$ genau dann, wenn $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\exp\colon D_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi)\}$ injektiv. Exotischer kann man den Streifen $D_\alpha$ drehen und dünner machen und ein analoges Resultat erhalten, es ist nur notwendig, dass der Streifen die Periode von exp vermeidet. Sei zum Beispiel $\theta = \pi/4$ und $\rho$ klein genug und $\gamma_1(t) = t(1 + i)$ und $\gamma_2(t) = t(1 + i) + \delta$. Dann gilt $\exp(\gamma_1(t)) = e^t e^{it}$ und $\exp(\gamma_2(t)) = e^{t+\delta} e^{it}$ und man erhält das Bild von exp auf dem um $\theta$ gekippten Streifen mit Dicke $\rho$, eine logarithmische Spirale.

Es stellen sich die folgenden Fragen. Gegeben ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^\times$, wann existiert auf $G$ eine Umkehrfunktion von exp? Wie sieht diese Umkehrfunktion aus, wenn sie existiert? Ist sie eindeutig bestimmt?

**Definition 1.** Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in G$, heißt *Logarithmusfunktion* oder *Zweig des Logarithmus* auf $G$.

**Bemerkung 2.**

(i) Ist $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion, so ist $\exp\colon f(G) \longrightarrow G$ die Umkehrfunktion von $f$, insbesondere ist $f$ injektiv, denn seien $z_1, z_2 \in G$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Dann folgt $\exp(f(z_1)) = \exp(f(z_2))$, also $z_1 = z_2$.

(ii) Ist $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion, so definiert auch $f_k(z) = f(z) + 2\pi ik$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Logarithmusfunktion auf $G$.

(iii) Sein $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ Logarithmusfunktionen, so existiert eine ganze Zahl $k$ mit $f(z) - g(z) = 2\pi ik$, denn es gilt $\exp(f(z) - g(z)) = z$ und $\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$, es existiert also eine stetig Funktion $k\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(z) - g(z) = 2\pi ik(z)$ für alle $z \in G$. Aber $G$ ist zusammenhängend, also ist $k$ konstant.

**Satz 3.** *Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Ist $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion auf $G$, so ist $f$ holomorph mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in G$.*

*Beweis.* Seien $z_0, z \in G$. Wir schreiben $f(z) = \omega$ und $f(z_0) = \omega_0$. Dann gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\exp(\omega) - \exp(\omega_0)},$$

also
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\omega-\omega_0}{\exp(\omega)-\exp(\omega_0)}=\frac{1}{\exp(\omega_0)}=\frac{1}{z_0}.$$
denn $z\to z_0$ genau dann, wenn $\omega\to\omega_0$. $\square$

**Satz 4.** *Sei $G\subset\mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:*
(i) *Auf $G$ existiert eine Logarithmusfunktion.*
(ii) *Die Funktion $\frac{1}{z}$ besitzt eine Stammfunktion auf $G$.*
(iii) *Für jeden Zyklus $\Gamma$ in $G$ ist $n(\Gamma,0)=0$.*

*Beweis.* Dass Logarithmusfunktionen Stammfunktionen von $\frac{1}{z}$ sind, haben wir schon bewiesen. Sei nun $g\colon G\longrightarrow\mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$. Dann ist $(z\exp(-g(z)))'=0$ für alle $z\in G$, d.h. $z\exp(-g(z))$ ist konstant auf $G$, etwa $z\exp(-g(z))=C\in\mathbb{C}^\times$. Da $\exp\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ surjektiv ist, ist $C$ von der Form $e^c$ für ein $c\in\mathbb{C}$. Es folgt, dass $\exp(g(z)+c)=z$ für alle $z\in G$, d.h. $g(z)+c$ ist eine Logarithmusfunktion auf $G$.

Für die Richtung (iii→ii) ist für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma$ in $G$ ist
$$0=n(\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\eta,$$
d.h. $\frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion auf $G$. Für die umgekehrte Richtung sei $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg in $G$. Dann ist
$$n(\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{2\pi i}F(\gamma(b))-\frac{1}{2\pi i}F(\gamma(a))=0.$$
für eine Stammfunktion $F$ von $\frac{1}{z}$. $\square$

**Bemerkung 5.**
(i) Auf $\mathbb{C}^\times$ existiert keine Logarithmusfunktion.
(ii) Auf der logarithmischen Spirale von oben existiert eine Logarithmusfunktion, denn in ihr existiert kein Zyklus, der 0 umläuft.
(iii) Auf jeder von 0 ausgehend geschlitzten Ebene existiert eine Logarithmusfunktion.

**Satz 6.** *Seien, für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$, die Gebiete $D_\alpha=\{z\in\mathbb{C}\colon\operatorname{Im}(z)\in(\alpha-\pi,\alpha+\pi)\}$ und $W_\alpha=\{z=|z|e^{i\varphi}\in\mathbb{C}^\times:\varphi\in(\alpha-\pi,\alpha+\pi)\}$ gegeben. Dann ist $\exp\colon D_\alpha\longrightarrow W_\alpha$ bijektiv.*

*Beweis.* Die Injektivität ist klar, da $\ker(\exp)=2\pi i\mathbb{Z}$. Ist $\omega=|\omega|e^{i\varphi}\in W_\alpha$ mit $\varphi\in(\alpha-\pi,\alpha+\pi)$, so setze $z=\log|\omega|+i\varphi$ mit dem reellen Logarithmus $\log|\omega|$. Dann ist $\exp(z)=|\omega|e^{i\varphi}=\omega$, was die Surjektivität zeigt. $\square$

**Definition 7.** Die Umkehrfunktion $\operatorname{Log}_\alpha\colon W_\alpha\longrightarrow D_\alpha$ von exp auf $D_\alpha$ heißt *$\alpha$–Zweig des Logarithmus*. Der Zweig $\operatorname{Log}_0$ heißt *Hauptzweig des Logarithmus*.

**Bemerkung 8.**
(i) Es gilt für alle $z \in W_0$, dass

$$\operatorname{Log}_0(z) = \int_{[1,z]} \frac{1}{\eta}\, \mathrm{d}\eta,$$

denn schreibe $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Da für alle geschlossenen Integrationswege $\gamma$ in $W_0$ das Integral $\int_\gamma 1/\eta\, \mathrm{d}\eta$ verschwindet, ist

$$\int_{[1,z]} \frac{1}{\eta}\, \mathrm{d}\eta = \int_{[1,|z|]} \frac{1}{\eta}\, \mathrm{d}\eta + \int_\gamma \frac{1}{\eta}\, \mathrm{d}\eta,$$

wobei $\gamma$ der Kreisbogen von $|z|$ nach $z$ sei. Wir parametrisieren die Wege als $[1,|z|](t) = 1 + (|z|-1)t$ für $t \in [0,1]$ und, wenn $\varphi \in [0,\varphi)$, sei $\gamma(t) = |z|e^{it}$ für $t \in [0,\varphi]$, bzw. wenn $\varphi \in (-\pi, 0]$, sei $\gamma(t) = |z|e^{-it}$ für $t \in [0, -\varphi]$. Dann gilt

$$\int_{[1,|z|]} \frac{1}{\eta}\, \mathrm{d}\eta = \int_0^1 \frac{|z|-1}{1+(|z|-1)t}\, \mathrm{d}t = \log|z|$$

und

$$\int_\gamma \frac{1}{\eta}\, \mathrm{d}\eta = \begin{cases} \int_0^{\varphi} \frac{i|z|e^{it}}{|z|e^{it}}\, \mathrm{d}t = i\varphi & \text{falls } \varphi \in [0,\pi) \\ \int_0^{-\varphi} \frac{-i|z|e^{it}}{|z|e^{it}}\, \mathrm{d}t = i\varphi & \text{falls } \varphi \in [0,-\pi) \end{cases}$$

und es folgt die Behauptung.

(ii) Da $\operatorname{Log}_0$ eine holomorphe Fortsetzung von $\log\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist, erhalten wir die Potenzreihenentwicklung

$$\operatorname{Log}_0(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} z^\nu \quad \text{für } |z| < 1.$$

Sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann definiert man $a^b \coloneqq \exp(b\log(a))$. Wir übertragen diese Definition auf $\mathbb{C}$.

**Definition 9.** Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet, auf dem eine Logarithmusfunktion $\operatorname{Log}\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert. Dann heißt für $b \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ z &\longmapsto \exp(b\operatorname{Log}(z)) \end{aligned}$$

ein *Zweig der b–ten Potenz* auf $G$ und wir schreiben $z^b \coloneqq \exp(b\operatorname{Log}(z))$.

**Bemerkung 10.** Im Allgemeinen ist $z^b$ nicht eindeutig. Sind $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Logarithmusfunktionen, so ist $f - g \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Das heißt, $z^b$ ist eindeutig bis auf einen Faktor $e^{b2\pi ik}$. Ist also $b \in \mathbb{Z}$, so ist $z^b$ eindeutig bestimmt.

**Satz 11.** *Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und* $\operatorname{Log}\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine Logarithmusfunktion. Dann kann für alle $a \in G$ und $n \in \{2, 3, \dots\}$ die Potenz $a^{1/n}$ nur die Werte*

$$\zeta_n^i \exp(\operatorname{Log}(a) \cdot 1/n), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

*mit einer primitiven $n$–ten Einheitswurzel $\zeta_n$, etwa $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$, annehmen. Diese Werte sind genau die $n$ Lösungen der Gleichung $z^n = a$.*

*Beweis.* Für $k \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\big(\zeta_n \exp(\operatorname{Log}(a) \cdot 1/n)\big)^n = \zeta_n^{kn} \exp(\operatorname{Log}(a)) = a,$$

d.h. jeder der gegebenen Werte löst $z^n = a$ und da sie alle verschieden sind, sind das sogar alle Lösungen von $z^n = a$. Gegeben $\operatorname{Log}\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ sind alle Logarithmusfunktionen auf $G$ durch $\operatorname{Log} + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben. Das heißt, für $a \in G$ kann $a^{1/n}$ die Werte

$$\mu_k = \exp\left(\frac{1}{n}(\operatorname{Log}(a) + 2\pi ik)\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

annehmen. Aber $\mu_k = \mu_{k+n}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, also hat man mit $n$ verschieden $\mu_k$ schon alle möglichen Werte von $a^{1/n}$ bestimmt. $\square$

**Beispiel 12.** Wir finden alle Lösungen der Gleichung $z^2 = 1 + i$ auf $\mathbb{C}$. Gesucht sind die Werte von $(1+i)^{1/2}$. Dafür benutzen wir den Hauptzweig $\operatorname{Log}_0$ des Logarithmus und erhalten alle Lösungen als $\pm \exp(\operatorname{Log}_0(1 + i) \cdot 1/2)$. Es bleibt $\operatorname{Log}_0(1 + i)$ zu bestimmen. Es ist $1+i = \sqrt{2} \exp(i\pi/4)$, also $\operatorname{Log}_0(1+i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$. Insgesamt sind die Lösungen von $z^2 = 1 + i$ genau $\pm\sqrt[4]{2} \cdot e^{i\pi/8}$.

# 8 Isolierte Singularitäten

Unser Ziel ist die Untersuchung von Funktionen, die mit Ausnahme einzelner Punkte in $\mathbb{C}$ holomorph sind, wie zum Beispiel $\frac{1}{z}$ oder $\frac{1}{z^2+1}$. Wir werden sehen, dass solche Funktionen auf Kreisringen um die Singularitäten eine Entwicklung der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

besitzen.

## 8.1 Holomorphe Funktionen auf Kreisringen

Wir schreiben

$$K_a(r,R) = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z-a| < R\}$$

für den Kreisring um $a$ mit Radien $r$ und $R$. Insbesondere ist $K_a(0,R) = \dot{U}_R(a)$.

**Satz 1.** *Sei $f \colon K_a(r,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann existieren holomorphe Funktionen $f_1 \colon U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ und $f_2 \colon U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei $U_1 = \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$ und $U_2 = U_R(a)$, so dass $f = f_1 + f_2$ auf $K_a(r,R)$. Man kann $f_1$ so wählen, dass $|f_1(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$. Durch diese Bedingungen werden $f_1$ und $f_2$ eindeutig festgelegt.*

*Beweis.* Für $\rho \in (r,R)$ sei $\gamma_\rho$ die Randkurve von $U_\rho(a)$. Wir definieren $f_{2,\rho} \colon U_\rho(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f_{2,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta.$$

Die Funktion $z \longmapsto f(\eta)/(\eta - z)$ ist für alle $\eta \in \operatorname{im}(\gamma_\rho)$ auf $U_\rho(a)$ holomorph, also folgt aus den Sätzen von Morera und Fubini, dass $f_{2,\rho}$ auf $U_\rho(a)$ holomorph ist. Sei $\rho' \in (\rho, R)$. Zu jedem $z \in U_\rho(a)$ finden wir eine offene Menge $U \subset K_a(r,R)$, so dass $\overline{K_a(\rho,\rho')} \subset U$. Dann ist auf $U$ die Funktion $\eta \longmapsto f(\eta)/(\eta - z)$ holomorph. Aus dem Satz von Cauchy folgt

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta = \int_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta.$$

Damit ist die Funktion

$$\begin{aligned} f_2 \colon U_R(a) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta, \end{aligned}$$

für ein $\rho \in (r,R)$ mit $\rho > |z-a|$, wohldefiniert und holomorph. Ebenso ist die Funktion

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \,\mathrm{d}\eta, \end{aligned}$$

für ein $\sigma \in (r, R)$ mit $\sigma < |z - a|$, wohldefiniert und holomorph. Wir zeigen, dass $f = f_1 + f_2$ auf $K_a(r, R)$. Offensichtlich ist der Zyklus $\gamma := \gamma_\rho - \gamma_\sigma$ nullhomolog in $K_a(r, R)$ für alle $r < \sigma < \rho < R$. Aus dem Satz von Cauchy folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} \, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \, \mathrm{d}\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} \, \mathrm{d}\eta$$

für $\sigma < |z - a| < \rho$.

Diese Zerlegung ist eindeutig, denn ist $f = g_1 + g_2$ mit $|g_1(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$, so gilt $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ auf $K_a(r, R)$. Dann ist

$$h(z) = \begin{cases} (g_2 - f_2)(z) & z \in U_R(a) \\ (f_1 - g_1)(z) & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)} \end{cases}$$

wohldefiniert und holomorph auf $\mathbb{C}$. Es gilt $|h(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$, also $h = 0$ nach Liouville. □

**Bemerkung 2.** In der Situation von Satz 1 nennt man $f_1$ den *Hauptteil* von $f$ und $f_2$ den *Nebenteil* von $f$. Natürlich gilt

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

für gewisse $a_n$ und $z \in U_R(a)$.

**Definition 3.** Unter *Laurent–Reihen* um $z_0 \in \mathbb{C}$ versteht man Reihen der Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

Der erste Summand heißt *Nebenteil*, der zweite *Hauptteil*. Eine Laurent–Reihe heißt *konvergent* (bzw. gleichmäßig konvergent, lokal gleichmäßig konvergent, etc.) wenn Haupt- und Nebenteil es sind.

**Bemerkung 4.** Sei $1/r \in (0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \eta^n$ und $R \in (r, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt

(i) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(0)}$.
(ii) Die Laurent–Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ konvergiert lokal gleichmäßig auf $K_0(r, R)$.

**Satz 5.** *Sei $f \colon K_a(r, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$$

*für alle $z \in K_a(r,R)$ und gewisse $a_n$. Der erste Summand konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$ lokal gleichmäßig gegen den Hauptteil von $f$, der zweite Summand konvergiert auf $U_R(a)$ lokal gleichmäßig gegen den Nebenteil von $f$. Ferner gilt, dass*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

*für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $r < \rho < R$.*

*Beweis.* Wir wissen schon, dass

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

für alle $z \in K_a(r,R)$, worin $f_1$ der Hauptteil von $f$ ist und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ lokal gleichmäßig auf $U_R(0)$ gegen den Nebenteil von $f$ konvergiert. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} F \colon \dot{U}_{1/r}(0) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)} \\ \omega &\longmapsto a + \tfrac{1}{\omega} \end{aligned}$$

biholomorph mit $F^{-1}(z) = (z-a)^{-1}$. Die Funktion $f_1 \circ F \colon \dot{U}_{1/r}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und es gilt

$$\lim_{z \to 0} (f_1 \circ F)(z) = \lim_{z \to 0} f_1(a + 1/z) = 0.$$

Die Fortsetzung $h \colon U_{1/r}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) = (f_1 \circ F)(z)$ für $z \neq 0$ und $h(0) = 0$ von $f_1 \circ F$ ist holomorph. Es folgt, dass

$$h(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega^n$$

für alle $\omega \in U_{1/r}(0)$ und gewisse $b_n$. Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $U_{1/r}(0)$. Da $F \colon \dot{U}_{1/r}(0) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$ bijektiv ist, gilt

$$f_1(z) = h(F^{-1}(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}.$$

Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$. Man definiert nun $a_{-n} \coloneqq b_n$.

Sei $r < \rho < R$ und $n \in \mathbb{Z}$. Die Laurent–Reihe $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^k$ konvergiert gleichmäßig auf $\partial U_\rho(a)$. Daher gilt

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{k-n-1} \, \mathrm{d}z.$$

Aber $(z-a)^{k-n-1}$ hat eine Stammfunktion auf $U_R(a)$ für $k \neq n$, also folgt

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = 2\pi i a_n. \qquad \square$$

**Korollar 6.** *Sei* $f\colon K_a(r,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n,$$

*wobei die Reihe auf* $K_a(r,R)$ *lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist* $f$ *holomorph,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

*und*

$$|a_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \sup_{z\in\partial U_\rho(a)} |f(z)|$$

*für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *und* $r < \rho < R$.

*Beweis.* Da die Laurent–Reihe gleichmäßig konvergent ist, ist $f$ holomorph und

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n n (z-a)^{n-1}.$$

Daraus folgt alles. □

**Beispiel.** Wir finden eine Darstellung als Laurent–Reihe für $f(z) = z^{-2}(1-z)^{-1}$. Diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Wir können also verschiedene Kreisringe betrachten, zum Beispiel die Ringe $K_0(0,1) = \dot{U}_1(0)$, $K_1(0,1) = \dot{U}_1(1)$ und $K_{1/2}(1/2,\infty)$.

(i) Für $z \in \dot{U}_1(0)$ haben wir

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

eine Laurent–Reihe für $f$ auf $\dot{U}_1(0)$.

(ii) Sei $z \in \dot{U}_1(1)$. Es ist

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{(1-(1-z))^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n(1-z)^{n-2} = -\frac{1}{1-z} - \sum_{n=2}^{\infty} n(1-z)^{n-2}.$$

(iii) Sei $z \in K_{1/2}(1/2,\infty)$. Dann ist $|z-1/2| > 1/2$, das heißt $|2z-1|^{-1} < 1$. Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

und wir können jeden Summanden einzeln entwickeln. Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1/2+1/2} = \frac{1}{(z-1/2)(1+(2z-1)^{-1})}$$

und man kann wieder mit der geometrischen Reihe entwickeln.

## 8.2 Singularitäten

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus U$ und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Der Punkt $z_0$ heißt *isolierte Singularität* von $f$, falls ein $r > 0$ existiert, so dass $\dot{U}_r(z_0) \subset U$.

**Definition 7.** Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon U \smallsetminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt $z_0$

(i) *hebbare Singularität* von $f$, falls ein $r > 0$ existiert, so dass $\dot{U}_r(z_0) \subset U$ und $f|_{\dot{U}_r(z_0)}$ beschränkt ist.
(ii) *Pol* von $f$, falls $|f(z)| \longrightarrow \infty$ für $z \to z_0$.
(iii) *wesentliche Singularität*, falls $z_0$ weder eine hebbare Singularität noch ein Pol von $f$ ist.

**Bemerkung 8.** Wir werden sehen, dass $z_0$ genau dann eine hebbare Singularität von $f$ ist, wenn $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert und endlich ist, und $z_0$ genau dann eine wesentliche Singularität von $f$ ist, wenn $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$ nicht existiert.

**Beispiel 9.** Sei $f\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

(i) $f(z) = z$. Dann hat $f$ eine hebbare Singularität an 0.
(ii) $f(z) = \sin(z)/z$. Dann hat $f$ eine hebbare Singularität an 0, denn $f(z) = 1 + O(z^2)$ um 0. Die Funktion $f$ besitzt hier eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.
(iii) $f(z) = e^z/z$. Dann ist 0 ein Pol von $f$.
(iv) $f(z) = e^{1/z}$. Die Folgen $(1/n)_n$ und $(1/in)_n$ konvergieren gegen 0. Aber

$$|e^n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

und

$$|e^{in}| = 1.$$

Also ist 0 weder hebbare Singularität noch Pol von $f$, also eine wesentliche Singularität von $f$.

**Satz 10** (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \notin U$ eine isolierte Singularität von $f$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Singularität $z_0$ ist hebbar.*
(ii) *Es existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f}\colon U \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\widetilde{f}|_U = f$.*

*Beweis.* In der Richtung (ii→i) ist $\widetilde{f}$ stetig in $z_0$, also natürlich beschränkt in einer Umgebung von $z_0$. Dann ist auch $f$ beschränkt auf der entsprechenden punktierten Umgebung.

Für die Richtung (ii→i) seien $r, c > 0$ mit $|f(z)| < c$ für $z \in \dot{U}_r(z_0)$. Wir definieren $g\colon U_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist $g$ auf $\dot{U}_r(z_0)$ holomorph, denn für $z \in \dot{U}_r(z_0)$

$$\left|\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\right| = |z - z_0||f(z)| \xrightarrow{z \to z_0} 0.$$

Also ist sogar $g'(z) = 0$ für alle $z \in \dot{U}_r(z_0)$. Da $g(z_0) = g'(z_0)$ erhalten wir für alle $z \in U_r(z_0)$, dass

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-2} = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(z - z_0)^k.$$

Die Reihe $\sum_k a_{k+2}(z - z_0)^k$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Taylorreihe von $g$ um $z_0$ und wir setzen

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(z - z_0)^k$$

für alle $z$ innerhalb des Konvergenzradius. Dann liefert $\widetilde{f}$ die gewünschte Fortsetzung von $f$. □

**Satz 11.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \notin U$ ein Pol von $f$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\begin{aligned} g_k\colon U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (z - z_0)^k f(z) \end{aligned}$$

*eine hebbare Singularität in $z_0$ hat. Das kleinste solche $k$ nennt man die* Ordnung *des Pols $z_0$.*

*Beweis.* Es existiert ein $r > 0$ so, dass $|f(z)| > 1$ für alle $z \in \dot{U}_r(z_0)$. Dann ist $h(z) := 1/f(z)$ holomorph auf $\dot{U}_r(z_0)$ und $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Also existiert eine holomorphe Fortsetzung $h_0\colon U_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ von $h$ mit $h_0(z_0) = 0$. Es folgt, dass ein $n \in \mathbb{N}$, eine offene Umgebung $U \subset U_r(z_0)$ von $z_0$ und eine holomorphe Funktion $g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) \neq 0$ existiert, so dass $h_0(z) = (z-z_0)^n g(z)$ auf $U$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $|g(z)| \geq |g(z_0)|/2$ für $z \in U_\varepsilon(z_0)$. Dann gilt für alle $z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$, dass

$$|f(z)(z - z_0)^n| = \left|\frac{1}{g(z)}\right| \leq \frac{2}{|g(z_0)|}.$$

Das heißt, $z_0$ ist eine hebbare Singularität von $f(z)(z - z_0)^n$. □

**Korollar 12.** *Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \notin U$ ein Pol von $f$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$z_0$ ist ein Pol der Ordnung $n$ von $f$.*

(ii) *Es existiert ein* $\varepsilon > 0$ *und eine holomorphe Funktion* $h_0\colon U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit* $h_0|_{\dot{U}_\varepsilon(z_0)} = 1/f$*, so dass* $h_0$ *eine Nullstelle der Ordnung* $n$ *hat.*

**Satz 13** (Casorati-Weierstraß)**.** *Eine isolierte Singularität* $z_0 \notin U$ *von* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist genau dann wesentlich, wenn für jede Umgebung* $V \subset U$ *von* $z_0$ *das Bild* $f(V \setminus \{z_0\})$ *dicht in* $\mathbb{C}$ *liegt.*

*Beweis.* Sei $z_0$ eine wesentliche Singularität von $f$. Angenommen, es gibt ein $r > 0$, so dass $f(\dot{U}_r(z_0))$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $|f(z) - w_0| > \varepsilon$ für alle $z \in \dot{U}_r(z_0)$. Also ist die durch $g(z) = 1/(f(z) - w_0)$ definierte Funktion auf $\dot{U}_r(z_0)$ holomorph mit einer hebbaren Singularität bei $z_0$. Sei $\lim_{z \to z_0} g(z) = c \in \mathbb{C}$. Damit hat $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ eine hebbare Singularität bei $z_0$ falls $c \neq 0$ oder einen Pol bei $z_0$ falls $c = 0$. □

**Satz 14.** *Sei* $f\colon \dot{U}_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ *für ein* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und* $r \in (0, \infty]$ *mit*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

*Die isolierte Singularität* $z_0$ *von* $f$ *ist genau dann*

(i) *hebbar, wenn* $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$.
(ii) *ein Pol der Ordnung* $k$*, wenn* $a_n = 0$ *für alle* $n < -k$ *und* $a_{-k} \neq 0$.
(iii) *wesentlich, wenn* $a_n \neq 0$ *für unendliche viele* $n < 0$.

**Definition 15.** Eine Funktion $f$ heißt *meromorph* in $U$, wenn es eine diskrete Teilmenge $P$ von $U$ gibt, so dass $f$ auf $U \setminus P$ holomorph ist und in jedem Punkt von $P$ einen Pol hat.

**Bemerkung 16.**

(i) Mit $P = \emptyset$ sieht man, dass holomorphe Funktionen auch meromorph sind.
(ii) Muss man $P \neq \emptyset$ wählen, so ist $f$ keine Abbildung $U \longrightarrow \mathbb{C}$. Wegen $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ für alle $z \in P$ ist es natürlich $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu erweitern. Wir sagen $z_n \to \infty$, genau dann, wenn $|z_n| \to \infty$. Mit diesen Festlegungen ist $f\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ mit $f(P) = \{\infty\}$ wohldefiniert und stetig.
(iii) Eine Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist genau dann meromorph, wenn $f$ sich lokal als Bruch von holomorphen Funktionen darstellen lässt. Damit sieht man leicht, dass die Menge $\mathscr{M}(U)$ aller meromorpher Funktionen $U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

## 8.3 Die Riemannsche Zahlkugel

Wir können die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ identifizieren. Es ist $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\|_2 = 1\}$ und sei $N = (0,0,1)$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon S^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ S^2 \setminus \{N\} \ni x &\longmapsto \tfrac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2) \\ N &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

stetig und invertierbar. Diese Abbildung identifiziert $S^2$ mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ durch eine Strecke zwischen $N$ und $x \in S^2$. Die Umkehrabbildung erfüllt

$$\varphi^{-1}(x_1 + ix_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

und

$$\varphi^{-1}(\infty) = N.$$

Diese Abbildung $\varphi$ heißt *stereographische Projektion* und deswegen heißt $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ oft *Riemannsche Zahlkugel*.

# 9 Der Residuensatz und Anwendungen

## 9.1 Der Residuensatz

Der Residuensatz ist eine Verallgemeinerung des Integralsatzes von Cauchy auf holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten.

**Definition 1.** Es sei $f$ eine auf $U$ bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion. Wir definieren das *Residuum* von $f$ an der Stelle $z_0 \in U$ als die Zahl

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f,$$

wobei $\varepsilon > 0$ so zu wählen ist, dass höchstens $z_0$ eine Singularität von $f$ in $\overline{U_\varepsilon(z_0)}$ ist.

**Bemerkung 2.**

(i) Sei $M \subset U$ die Menge aller isolierten Singularitäten von $f$ in $U$, $\varepsilon$ wie oben und $\gamma_\varepsilon(z_0)$ die Randkurve von $U_\varepsilon(z_0)$. Sei $\gamma$ ein geschlossener Integrationsweg in $U \setminus M$, so dass $\Gamma = \gamma - \gamma_\varepsilon(z_0)$ nullhomolog in $U \setminus M$ ist. Dann ist

$$\int_\gamma f = \operatorname{res}_{z_0}(f).$$

(ii) Ist $z_0 \in U$ keine isolierte Singularität von $f$, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

(iii) Ist $z_0 \in U$ eine isolierte Singularität von $f$, so können wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass $f$ auf $\dot{U}_{2\varepsilon}(z_0)$ holomorph ist und

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

für gewisse $a_n$ auf ganz $\dot{U}_{2\varepsilon}(z_0)$ gilt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f = a_{-1}.$$

**Satz 3** (Residuensatz)**.** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $M$ eine diskrete Teilmenge von $U$ und $f\colon U \setminus M \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus $\gamma$ in $U$ mit* $\operatorname{im}(\gamma) \subset U \setminus M$, *dass*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{z\in M} n(\gamma, z) \operatorname{res}_z(f).$$

*Beweis.* Sei $M_1 \subset M$ gegeben durch

$$M_1 = \{z \in M : n(\gamma, z) \neq 0\}$$

und $M_2 = M \setminus M_1$. Es ist $\# M_1 < \infty$, da $\operatorname{im}(\gamma)$ kompakt ist. Schreibe $M_1 = \{z_1, \ldots, z_k\}$. Sei $1 \leq j \leq k$ und $h_j$ der Hauptteil von $f$ um $z_j$. Nach Satz 1 wissen wir, dass $h_j$ auf

$\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ holomorph ist. Es folgt, dass $f - h_j$ holomorph auf $(U \setminus M) \cup \{z_j\}$ ist, d.h. $f - \sum_j h_j$ ist holomorph auf $U \setminus M_2$. Der Zyklus $\gamma$ ist nullhomolog auf $U \setminus M_2$ und es folgt mit dem Integralsatz von Cauchy, dass

$$0 = \int_\gamma \left( f - \sum_{j=1}^k h_j \right) = \int_\gamma f - \sum_{j=1}^k \int_\gamma \frac{a_{-1}}{\eta - z_j} \,\mathrm{d}\eta = \int_\gamma f - 2\pi i \sum_{j=1}^k a_{-1} n(\gamma, z_j),$$

wenn $h_j(z) = \sum_{n=1}^\infty a_{-n}(z - z_j)^{-n}$ in einem Kreisring um $z_j$. □

**Bemerkung 4.**

(i) Es ist $\operatorname{res}_z(af + bg) = a \operatorname{res}_z(f) + b \operatorname{res}_z(g)$.

(ii) Ist $z_0$ ein Pol erster Ordnung von $f$, so gilt $\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$.

(iii) Ist $g$ um $z_0$ holomorph und hat $f$ dort einen Pol erster Ordnung, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(gf) = \operatorname{res}_{z_0}\left( \frac{g(z) \operatorname{res}_{z_0}(f)}{z - z_0} \right) = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0}(f).$$

(iv) Hat $f$ in $z_0$ einen Pol der Ordnung $n$, so gilt

$$(n-1)! \operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z - z_0)^n f(z).$$

## 9.2 Anwendungen: Reelle Integration

Das Prinzip lautet wie folgt. Für $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall betrachte

$$\int_I f.$$

Das Prinzip ist, eine Beziehung zwischen $\int_I f$ und dem Integral einer holomorphen Fortsetzung (bis auf isolierte Singularitäten) von $f$ entlang einer geschlossenen Integrationskurve in $\mathbb{C}$. Letzteres Integral lässt sich dann mittels des Residuensatzes berechnen. Häufig wird $I = (-\infty, \infty)$ sein. Zuerst eine kurze Wiederholung zu uneigentlichen Integralen:

Riemann–Integrale sind nur auf kompakten Intervallen definiert. Eine Funktion beschränkte $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann–integrierbar, wenn das Oberintegral von $f$ gleich dem Unterintegral von $f$ ist. Das sind zum Beispiel immer Treppenfunktionen, monotone Funktionen und stetige Funktionen. ist $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $R > a$ auf $[a,R]$ Riemann–integrierbar ist und existiert

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f,$$

so definiert man

$$\int_a^\infty f := \lim_{R \to \infty} \int_a^R f.$$

**Beispiel.** Sei $f(x) = x^{-s}$ mit $s > 1$. Dann ist

$$\int_a^R x^{-s}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_a^R = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{a^{s-1}} - \frac{1}{R^{s-1}}\right) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{a^{1-s}}{s-1} < \infty.$$

Ist $f\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a+\varepsilon, b]$ Riemann–integrierbar und existiert

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f,$$

so heißt

$$\int_a^b f := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f$$

das *uneigentliche Integral* von $f$ auf $[a,b]$.

**Beispiel.** Sei $f(x) = x^{-s}$ mit $s \in (0,1)$. Es ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-s}}{1-s} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-s}$$

Also existiert das uneigentliche Integral von $f$ auf $[0,1]$.

Weitere Beispiele für uneigentliche Integral sind:

- Sei $f\colon (-\infty,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ Riemann–integrierbar. Wir definieren das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty f := \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^0 f + \lim_{R_2\to\infty} \int_0^{R_2} f, \tag{1}$$

  falls beide Grenzwerte existieren.

- Sei $f\colon [a,b) \cup (b,c] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren das Integral

$$\int_a^c := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_a^{b-\varepsilon} f + \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int_{b+\varepsilon}^c f, \tag{2}$$

  falls beide Grenzwerte existieren.

Falls beide Grenzwerte in (1) bzw. (2) existieren, so gilt

$$\int_\infty^\infty f = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f$$

bzw.

$$\int_a^c f = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f.$$

**Anwendung 1.** Sei $R$ eine rationale Funktion, die in $\infty$ mindestens zweiter Ordnung verschwindet und keinen Pol auf $\mathbb{R}$ hat. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z(R).$$

*Beweis.* Da $R$ stetig ist (für $x \in R$) und $|R(x)| \leq C|x|^{-2}$ für große $x$, existiert das uneigentliche Integral von $R$ über $(-\infty, \infty)$. Also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} R(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sei $M \subset \mathbb{C}$ die Menge der Singularitäten von $R$ und sei $\Gamma_\rho = \gamma_{1,\rho}\gamma_{2,\rho}$, wobei $\gamma_{1,\rho}$ die Strecke entlang der reellen Achse von $-\rho$ nach $\rho$ und $\gamma_{2,\rho}$ der Halbkreis in der oberen Halbebene von $\rho$ nach $-\rho$ sei. Sei nun $\rho$ so groß, dass alle Singularitäten von $R$ mit echt positivem Imaginärteil im inneren von $\Gamma_\rho$ liegen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\rho}^{\rho} R(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\Gamma_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{2,\rho}} R(z)\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z(R) - \int_{\gamma_{2,\rho}} R(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Für große $\rho$ gilt für ein geeignetes $C$, dass

$$\left|\int_{\gamma_{2,\rho}} R(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\gamma_{2,\rho}} \frac{C}{|z|^2}\,\mathrm{d}z = \frac{C}{\rho^2}\pi\rho \xrightarrow{\rho\to\infty} 0.$$ ☐

**Anwendung 2.** Sei $R$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keinen Pol hat und in $\infty$ mindestens erster Ordnung verschwindet. Dann gilt:

(i) $R(x)e^{ix}$ ist auf $(-\infty, \infty)$ integrierbar im uneigentlichen Sinn.
(ii) Für das Integral gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z(R(\eta)e^{i\eta}).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass

$$\lim_{\rho_1\to\infty}\lim_{\rho_2\to\infty} \int_{-\rho_1}^{\rho_2} R(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x$$

existiert. Wähle $\Gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ wie in Abbildung 11. Wähle $\rho_1$, $\rho_2$ und $s$ so groß, dass alle Singularitäten von $R(z)e^{iz}$ mit echt positivem Imaginärteil innerhalb von $\Gamma$ liegen. Dann ist

$$\int_{-\rho_1}^{\rho_2} R(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z(R(\eta)e^{i\eta}) - \int_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} R(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z.$$

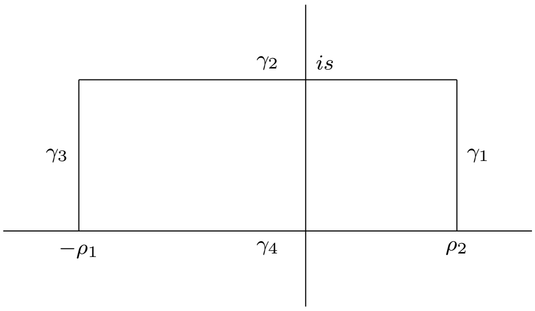


Abbildung 11: Die Integrationskurve in Anwendung 2

Wir schreiben

$$I_j = \int_{\gamma_j} R(z) e^{iz} \, \mathrm{d}z.$$

Dann gilt für große $s$, dass

$$|I_2| \leq \frac{C}{s} \int_{\gamma_2} \left| e^{i(\mathrm{Re}(z)+is)} \right| \, \mathrm{d}z \leq \frac{C}{s} e^{-s} (\rho_1 + \rho_2) \longrightarrow 0,$$

für geeignetes $C$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^1 R(\rho_2 + its) e^{i(\rho_2 + its)} is \, \mathrm{d}t \right| \leq \\ &\leq s \int_0^1 \frac{Ce^{-ts}}{\sqrt{\rho_2^2 + (ts)^2}} \, \mathrm{d}t \leq -\frac{Cs}{\rho_2} \frac{1}{s} e^{-ts} \bigg|_{t=0}^1 = \\ &= \frac{C}{\rho_2} (1 - e^{-s}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$|I_3| \leq \frac{C}{\rho_1} (1 - e^{-s}) \longrightarrow 0.$$

□

**Bemerkung 5.** Für beide Anwendungen ist es nicht notwendig, dass $R$ eine rationale Funktion ist. Es genügt, dass $R$ in einer Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{\mathbb{H}}$ bis auf endlich viele Singularitäten $z_1, \ldots, z_k$ mit $z_j \notin \mathbb{R}$ holomorph ist und dass $R$ im Unendlichen entsprechend schnell abfällt.

**Beispiel 6.** Wir berechnen

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

für $a > 0$. Dann folgt aus Anwendung 2, dass

$$I = \mathrm{Re}\left(\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z > 0} \mathrm{res}_z\left(\frac{e^{iz}}{a^2 + z^2}\right)\right).$$

Es ist

$$\frac{e^{iz}}{a^2 + z^2} = \frac{e^{iz}}{(z + ia)(z - ia)}$$

also ist die einzige Singularität in der oberen Halbebene bei $z = ia$. Es gilt

$$\mathrm{res}_{ia}\left(\frac{e^{iz}}{a^2 + z^2}\right) = \lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{e^{iz}}{(z + ia)(z - ia)} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

und es folgt

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \pi \frac{e^{-a}}{2a}$$

**Anwendung 3** (Integration von 0 bis $\infty$)**.** Sei $\lambda \in (0, 1)$ und $R$ eine rationale Funktion ohne Pole auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $R$ in $\infty$ mindestens zweiter Ordnung verschwindet und in 0 holomorph ist oder dort einen Pol erster Ordnung hat. Dann ist

$$\int_0^\infty x^\lambda R(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \lambda}} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z(z^\lambda R(z))$$

wobei $f(z) = z^\lambda := \exp(\lambda \operatorname{Log}_\pi(z))$.

Sei $S \subset \mathbb{C}$ diskret und schreibe $S = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $0 = |a_0| \leq |a_1| \leq \dots$. Seien weiter $m_j \in \mathbb{N}$ gegeben. Der Ansatz

$$f(z) = z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z/a_j)^{m_j} \, e^{P_j(z/a_j)m_j}$$

konvergiert gegen eine holomorphe Funktion, wenn

$$\sum_{j=k_0}^{\infty} \Big| (1 - z/a_j)^{m_j} \, e^{P_j(z/a_j)m_j} - 1 \Big| \tag{1}$$

lokal gleichmäßig konvergiert. Für kleine $|z|$ hat das Problem

$$(1 - z)^{m_j} e^{A(z)} = 1$$

eine Lösung, nämlich

$$A(z) = \mathrm{Log}_0(1 - z)^{-m_j} = m_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Setze

$$P_{k_j}(z/a_j) = \sum_{n=1}^{k_j} \frac{(z/a_j)^n}{n}$$

und

$$E_{k_j}(z/a_j) := (1 - z/a_j) e^{P_{k_j}(z/a_j)}.$$

Der Ansatz wird dann

$$f(z) = z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} E(z/a_j)^{m_j}.$$

Wir müssen jetzt die Grade $k_j$ so wählen, dass $|E(z/a_j)^{m_j} - 1|$ klein wird.

**Lemma 7.** *Seien $m > 0$ und $k \geq 0$ ganze Zahlen, $|z| \leq 1/2$ und $2m|z|^{k+1} \leq 1/2$. Dann gilt*

$$|E_k(z)^m - 1| \leq 4m|z|^{k+1}.$$

*Beweis.* Es ist

$$E_k(z)^m = (1 - z)^m e^{mP_k(z)} = (1 - z)^m \exp\Big( - m \, \mathrm{Log}_0(1 - z) - m \sum_{j=1}^{\infty} z^j/j \Big) =$$

$$= \exp\Big( - m \sum_{j=k+1}^{\infty} z^j/j \Big).$$

Wir schreiben $A(z)$ für den Exponenten. Also gilt $|E_k(z)^m - 1| = |e^{A(z)} - 1|$ und wir erhalten

$$|E_k(z)^m - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A(z)|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A(z)|^n$$

und

$$|A(z)| \leq m \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|z|^j}{j} = m|z|^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \leq m|z|^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 2m|z|^{k+1}.$$

Es folgt

$$|E_k(z)^m - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2m|z|^{k+1})^n = 2m|z|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} (2m|z|^{k+1})^j \leq 4m|z|^{k+1}. \qquad \square$$

**Lemma 8.** *Ist $N \in \mathbb{N}$ groß genug und $k_j \geq j + m_j$, so konvergiert*

$$\sum_{j=N}^{\infty} |E_{k_j}(z/a_j)^{m_j} - 1|$$

*lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$.*

*Beweis.* Wir benutzen, dass $|a_j| \to \infty$. Sei $\overline{U_R(0)}$, $R > 0$, fest. Wähle $N$ so groß, dass $R/|a_j| \leq 1/2$ und $2m_j(R/|a_j|)^{k_j+1} \leq 1/2$. Letzteres ist immer möglich, denn

$$2m_j(R/|a_j|)^{k_j+1} \leq m_j(1/2)^{k_j} \leq m_j(1/2)^{j+m_j} \leq (1/2)^j.$$

Aus **??** erhalten wir, dass

$$|E_{k_j}(z/a_j)^{m_j} - 1| \leq 4m_j|z/a_j|^{k_j+1} \leq 2m_j(1/2)^{j+m_j} \leq 2(1/2)^j.$$

Es folgt, dass die fragliche Summe gleichmäßig auf $\overline{U_R(0)}$ konvergiert. $\square$

**Satz 9** (Weierstraß)**.** *Es sei $\widehat{S} = \{(a_j, m_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Punktverteilung mit $0 = |a_0| < |a_1| \leq \dots$, $m_j \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine holomorphe Lösung der Nullstellenverteilung $f\colon \mathbb{C}|to\mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z/a_j)^{m_j} e^{m_j P_{k_j}(z/a_j)}$$

*mit*

$$P_{k_j}(z) = \sum_{n=1}^{k_j} \frac{z^n}{n}$$

*und wobei $k_j \in \mathbb{N}$ so gewählt werden muss, dass für große $N$ die Reihe*

$$\sum_{j=N}^{\infty} |E_{k_j}(z/a_j)^{m_j} - 1|$$

*lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ konvergiert. Es genügt, $k_j \geq j + m_j$ zu wählen.*

**Beispiel.** Wir finden eine holomorphe Funktion $f$ mit Nullstellen in $\mathbb{N}$ der Ordnung 1. Es genügt

$$f(z) = z\prod_{j=1}^{\infty}(1 - z/j)e^{z/j},$$

denn

$$\Big|(1 - z/a_j)e^{P_{k_j}(z/j)} - 1\Big| \leq 4|z/j|^{k_j+1}.$$

## 9.3 Der Satz von Mittag–Leffler

Wir betrachten folgende Frage. Gegeben $\{(a_j, m_j)\}_{a_j\in S}$ für eine diskrete Menge $S \subset \mathbb{C}$, gibt es dann eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus S \longrightarrow \mathbb{C}$, die an jeder Stelle $a_j \in S$ einen Pol der Ordnung $m_j$ hat. Die Antwort ist "Ja" und man kann noch ein schärferes Resultat beweisen.

**Satz 10** (Mittag–Leffler). *Es sei $S = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $0 = |a_0| < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$. Seien $h_j\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganze Funktionen. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus S \longrightarrow \mathbb{C}$ deren Hauptteil in $a_j \in S$ durch $h_j$ gegeben ist, d.h.*

$$f(z) - h_j\Big(\frac{1}{z - a_j}\Big)$$

*hat in $a_j$ eine hebbare Singularität. Man kann*

$$f(z) = h_0\Big(\frac{1}{z}\Big) + \sum_{j=1}^{\infty}\bigg(h_j\Big(\frac{1}{z - a_j}\Big) - P_{k_j}(z)\bigg)$$

*wählen, wobei $P_{k_j}$ das Taylorpolynom um $0$ von $h_j(1/(z - a_j))$ bis zur Ordnung $k_j$ ist. Die Summanden bezeichnen wir mit $M_j(z)$.*

*Beweis.* Zur Konvergenz sei $K_R = \overline{U_R(0)}$, $R > 0$, fest. Wähle $N > 0$ so groß, dass $|a_j| \geq 2R$ für $j \geq N$. Dann ist $h_j(1/(z - a_j))$ holomorph auf $K_R$ für $j \geq N$ mit Taylorentwicklung

$$h_j\Big(\frac{1}{z - a_j}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Sei $P_{k_j}(z) = \sum_{n=0}^{k_j} c_n z^n$ und wähle $k_j$ so groß, dass

$$\bigg|h_j\Big(\frac{1}{z - a_j}\Big) - P_{k_j}(z)\bigg| \leq \frac{1}{j^2}.$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $K_R$. Die gewünschte Eigenschaft folgt, denn für festes $k$ ist

$$f(z) - h_k\Big(\frac{1}{z - a_k}\Big) = h_0\Big(\frac{1}{z}\Big) + \sum_{j=1}^{k-1} M_j(z) - P_{k_k}(z) + \sum_{j=k+1}^{\infty} M_j(z)$$

holomorph lokal um $a_k$. $\square$