Vorlesung aus dem Wintersemester 2010/11

Analysis 3

Prof. Dr. Hans-Dieter Donder

geTEXt von Viktor Kleen & Florian Stecker

Inhaltsverzeichnis

16 Das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$

Definition. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Q ist ein *Quader*, wenn es beschränkte Intervalle $I_1, \dots, I_n$ gibt mit $Q = I_1 \times \dots \times I_n$.

Lemma 1. *Seien $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader. Dann gibt es nichtleere paarweise disjunkte Quader $P_1, \dots, P_m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit*

1. $\bigcup_{i=1}^k Q_i = \bigsqcup_{j=1}^m P_j$
2. $P_j \cap Q_i = \emptyset$ *oder* $P_j \subseteq Q_i$ *für* $1 \leq j \leq m$ *und* $1 \leq i \leq k$.

Beweis. durch Induktion über n.

Definition. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Wir definieren das *Volumen* $v(Q)$ von Q wie folgt: Ist I ein beschränktes Intervall, mit linkem Randpunkt a und rechtem Randpunkt b, so setze $v(I) = b - a$. Ist $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ mit $I_1, \dots, I_n$ beschränkte Intervalle, so setze $v(Q) = v(I_1) \cdots v(I_n)$. Ist Q wie oben, so schreibe manchmal auch $v_n(Q)$ für $v(Q)$.

Lemma 2. *Seien $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ paarweise disjunkte Quader, und sei $Q = \bigsqcup_{i=1}^n Q_i$. Ist Q ein Quader, so gilt $v(Q) = \sum_{i=1}^n v(Q_i)$.*

Beweis. anschaulich klar.

Definition. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir die *charakteristische Funktion* $1_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus A \end{cases}$$

Es gilt also für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 1_{A \cup B} &= \max\{1_A, 1_B\} \\ 1_{A \cap B} &= \min\{1_A, 1_B\} \\ 1_{A \smallsetminus B} &= \max\{0, 1_A - 1_B\} \end{aligned}$$

Definition. Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f ist eine *Treppenfunktion*, wenn es Quader $Q_1, \dots, Q_n \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ gibt, mit $f = \sum_{i=1}^k a_i 1_{Q_i}$. Es folgt unmittelbar, dass die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ einen Vektorraum bilden.

Definition. Sei nun $f = \sum_{i=1}^k a_i 1_{Q_i}$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Wir möchten das *Integral* von f definieren durch

$$\int f \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^k a_i v(Q_i)$$

Hierzu müssen wir zeigen, dass dieser Wert unabhängig von der speziellen Darstellung von f ist, die natürlich nicht eindeutig ist.

Lemma. *Sei* $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{Q_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{P_j}$ *eine Treppenfunktion auf* $\mathbb{R}^n$*. Dann gilt* $\sum_{i=1}^{k} a_i v(Q_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j v(P_j)$*.*

Beweis. Durch Hinzufügen von Summanden der Form $0 \cdot 1_Q$ können wir o.E. annehmen, dass $k = m$ und $Q_i = P_i$. Nach Lemma 1 gibt es paarweise disjunkte Quader $S_1, \dots, S_l \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

(1) $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i = \bigcup_{j=1}^{l} S_j$

(2) $S_j \cap Q_i = \emptyset$ oder $S_j \subseteq Q_i$ für $1 \leq j \leq l$ und $1 \leq i \leq k$.

Für $1 \leq j \leq l$ setze $B_j = \{i \colon S_j \subseteq Q_i\}$ und $c_j = \sum_{i \in B_j} a_i$. Wegen (2) ist dann für alle $x \in S_j$ $f(x) = c_j$. Setze nun für $1 \leq i \leq k$ $A_i = \{j \colon S_j \subseteq Q_i\}$. Wegen (1) ist also $Q_i = \bigcup_{j \in A_i} S_j$. Nach Lemma 2 gilt also $v(Q_i) = \sum_{j \in A_i} v(S_j)$. Somit folgt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v(Q_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j \in A_i} v(S_j) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i \in B_j} a_i \right) v(S_j) = \sum_{j=1}^{l} c_j v(S_j)$$

Analog folgt $\sum_{i=1}^{k} b_i v(Q_i) = \sum_{j=1}^{l} c_j v(S_j)$. Somit können wir das Integral von Treppenfunktionen wie oben definieren. □

Satz 3. *Seien* $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Treppenfunktionen und* $c \in \mathbb{R}$*. Dann gelten:*

(1) $\displaystyle\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int cf\,\mathrm{d}x = c \int f\,\mathrm{d}x$

(3) Falls $f \leq g$*, so* $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}x \leq \int g\,\mathrm{d}x$

Beweis. (1) und (2) folgen aus der Definition. Wie oben finden wir mit Lemma 1 paarweise disjunkte nichtleere Quader $Q_1, \dots, Q_k$ und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ mit $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{Q_i}$ und $g = \sum_{i=1}^{k} b_i 1_{Q_i}$. Ist dann $f \leq g$, so $a_i \leq b_i$ für $1 \leq i \leq k$, also ist

$$\int f\,\mathrm{d}x \leq \int g\,\mathrm{d}x$$

□

Bemerkung. Ist Q ein Quader, so ist $v(Q) = \displaystyle\int 1_Q\,\mathrm{d}x$.

Bemerkung. Ist f eine Treppenfunktion, so ist $|f|$ eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\left| \int f\,\mathrm{d}x \right| \leq \int |f|\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei f eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann existieren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{Q_i}$. Dann ist aber $|f| = \sum_{i=1}^{k} |a_i| 1_{Q_i}$, also eine Treppenfunktion. Der Rest folgt aus Monotonie und Linearität wegen $f, -f \leq |f|$. □

Aus technischen Gründen betrachten wir im Folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Wie wir mit ∞ und $-\infty$ rechnen wird keine wesentliche Rolle spielen. Es sei deshalb einfach auf irgendeine sinnvolle Weise fortgesetzt.

Konvention. "Funktion auf $\mathbb{R}^n$" bedeutet im Folgenden "Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$".

Definition. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Eine *Hüllreihe* von f ist eine Reihe der Form

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$$

mit den Eigenschaften:

(1) Die Q_k sind offene Quader im $\mathbb{R}^n$ und $c_k \in \mathbb{R}^+$.

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \varphi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x)$$

Weiterhin sei der *Inhalt von* φ:

$$I(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k)$$

Bemerkung. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k = (-k,k)^n$. Dann ist für jedes $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} 1_{Q_k}$ eine Hüllreihe von f.

Definition. Sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, Wir definieren die L^1-*Halbnorm* von f durch

$$\|f\|_1 = \inf\{I(\varphi)\colon \varphi \text{ ist Hüllreihe}\}$$

Bemerkung. Offenbar gilt: Falls $|f| \leq |g|$, so ist $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

Bemerkung. $\|\cdot\|_1$ ist eine Halbnorm, d.h. $\|f\|_1 \geq 0$, und es gilt für $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $c \in \mathbb{R}$

(N2) $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1$

(N3) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Beweis. Der Beweis von (N2) ist offensichtlich. Wegen $|f+g| \leq |f| + |g|$ folgt (N3) aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4. *Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}^+$. Dann gilt*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle eine Hüllreihe $\varphi_k = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ki} 1_{Q_{ki}}$ von f_k mit $I(\varphi_k) \leq \|f_k\|_1 + \varepsilon/2^k$. Setze $\varphi = \sum_{k,i=0}^{\infty} c_{ki} 1_{Q_{ki}}$. Dann ist φ eine Hüllreihe von $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit

$$I(\varphi) = \sum_{k,i=0}^{\infty} c_{ki} v(Q_{ki}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_{ki} v(Q_{ki}) \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + 2\varepsilon$$

Wegen $\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\|_1 \leq I(\varphi)$ folgt hieraus mit $\varepsilon \to 0$ die Behauptung. □

Bemerkung. Die Voraussetzung $f_k \geq 0$ ist nicht notwendig, denn

$$\Big\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big\|_1 \leq \Big\|\Big|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big|\Big\|_1 \leq \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|\Big\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \||f_k|\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1$$

Lemma 5. *Sei A ein abgeschlossener Quader. Dann gilt $\|1_A\|_1 = v(A)$.*

Beweis. Sei Q ein offener Quader mit $A \subseteq Q$. Dann ist 1_Q eine Hüllreihe von 1_A, also $\|1_A\|_1 \leq I(1_Q) = v(Q)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert aber ein derartiges Q mit $v(Q) \leq v(A) + \varepsilon$.
Sei $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ eine Hüllreihe von 1_A. Wir müssen zeigen, dass $v(A) \leq I(\varphi)$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in A$ gibt es wegen $\varphi(x) \geq 1$ ein $m(x) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{m(x)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1-\varepsilon$. Da die Q_k offen sind, gilt dies dann für alle $z \in U(x)$ für eine offene Umgebung $U(x)$ von x. Dann ist aber $\{U(x) \colon x \in A\}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es aber endlich viele $x_1, \ldots, x_p \in A$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} U(x_i)$. Setze nun $m = \max\{m(x_1), \ldots, m(x_p)\}$. Somit erhalten wir mit Satz 3

$$I(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) \geq \sum_{k=0}^{m} c_k v(Q_k) \geq \int (1-\varepsilon) 1_A \,\mathrm{d}x = (1-\varepsilon) v(A)$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Lemma 6. *Für jede Treppenfunktion f gilt*

$$\|f\|_1 = \int |f| \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Wegen $\|f\|_1 = \||f|\|_1$ können wir ohne Einschränkung $f \geq 0$ annehmen. Nach Lemma 1 und Lemma 2 existieren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_r$ mit $Q_1, \ldots, Q_s$ offen, $v(P_1) = \cdots = v(P_r) = 0$ und $c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{R}$ mit

$$f = \sum_{k=1}^{s} c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^{r} d_i 1_{P_i}$$

Wegen $f \geq 0$ sind $c_k, d_i \geq 0$.

"$\leq$" Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $1 \leq i \leq r$ wähle einen offenen Quader P_i^* mit $P_i \subseteq P_i^*$ und $v(P_i^*) \leq \varepsilon$. Dann ist

$$\varphi := \sum_{k=1}^{s} c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^{r} d_i 1_{P_i^*}$$

eine Hüllreihe von f. Also

$$\|f\|_1 \leq I(\varphi) \leq \sum_{k=1}^{s} c_k v(Q_k) + \varepsilon \sum_{i=1}^{r} d_i$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt hieraus:

$$\|f\|_1 \leq \sum_{i=1}^{s} c_k v(Q_k) = \int |f| \,\mathrm{d}x$$

"$\geq$" Sei A ein abgeschlossener Quader mit $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Weiterhin sei m das Maximum der Werte von f. Dann ist $g := m1_A - f \geq 0$ und eine Treppenfunktion. Somit gilt

$$\|g\|_1 \leq \int g \,\mathrm{d}x$$

Hieraus und mit Lemma 5 erhält man

$$\begin{aligned} \int |f| \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x = \int (m1_A - g) \,\mathrm{d}x = m \int 1_A \,\mathrm{d}x - \int g \,\mathrm{d}x \leq mv(A) - \|g\|_1 \\ = \|f + g\|_1 - \|g\|_1 \leq \|f\|_1 \end{aligned}$$

□

Definition. Sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. f ist *(Lebesgue-)integrierbar*, wenn es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$. Wir wollen das Integral von f definieren durch

$$\int f \,\mathrm{d}x := \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Lemma. *Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0 = \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_1$, so gilt:*

1. $\left(\int f_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $\left(\int g_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *sind konvergent.*
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x$

Beweis.

1. $\int f_k \,\mathrm{d}x$ ist eine Cauchyfolge, denn:

$$\left| \int f_k \,\mathrm{d}x - \int f_m \,\mathrm{d}x \right| \leq \int |f_k - f_m| \,\mathrm{d}x = \|f_k - f_m\|_1 \leq \|f_k - f\|_1 + \|f - f_m\|_1$$

2. Es gilt:

$$\left| \int f_k \,\mathrm{d}x - \int g_k \,\mathrm{d}x \right| \leq \int |f_k - g_k| \,\mathrm{d}x = \|f_k - g_k\|_1 \leq \|f_k - f\|_1 + \|f - g_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Also ist $\lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x$. □

Satz 7. *Ist f integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar und es gilt*

$$\int |f| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1$$

Beweis. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty} \|f-f_k\|_1 = 0$. Wegen $||f|-|f_k|| \leq |f-f_k|$ folgt $\||f|-|f_k|\|_1 \leq \|f-f_k\|_1$ und daher $\lim_{k\to\infty}\||f|-|f_k|\|_1 = 0$. Also ist $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\int |f| \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int |f_k| \,\mathrm{d}x$$

Nun ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\|f_k\|_1 - \|f-f_k\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \|f_k\|_1 + \|f-f_k\|_1$$

Mit $k \to \infty$ folgt hieraus wegen $\|f_k\|_1 = \int |f_k| \,\mathrm{d}x$

$$\int |f| \,\mathrm{d}x \leq \|f\|_1 \leq \int |f| \,\mathrm{d}x$$ □

Satz 8. *Seien f, g integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:*

1. *$f+g$ ist integrierbar, und es gilt*

$$\int (f+g) \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x + \int g \,\mathrm{d}x$$

2. *cf ist integrierbar, und es gilt*

$$\int cf \,\mathrm{d}x = c \int f \,\mathrm{d}x$$

3. *Ist $f \leq g$, so ist*

$$\int f \,\mathrm{d}x \leq \int g \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty} \|f-f_k\|_1 = 0 = \lim_{k\to\infty} \|g-g_k\|_1$.

1. Wegen $\|(f+g)-(f_k+g_k)\|_1 \leq \|f-f_l\|_1 + \|g-g_k\|_1$ ist auch $\lim_{k\to\infty} \|(f+g)-(f_k+g_k)\|_1 = 0$. Daher ist $f+g$ integrierbar und es gilt

$$\int (f+g) \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int (f_k+g_k) \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x + \int g \,\mathrm{d}x$$

2. Wegen $\|cf - cf_k\|_1 = |c|\|f-f_k\|$ ist auch $\lim_{k\to\infty} \|cf-cf_k\|_1 = 0$. Daher ist cf integrierbar und es gilt

$$\int cf \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int cf_k \,\mathrm{d}x = c \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x = c \int f \,\mathrm{d}x$$

3. Sei $f \leq g$. Dann ist $g - f \geq 0$. $g - f$ ist integrierbar, also gilt nach Satz 7
$$\int (g-f)\,\mathrm{d}x = \|g-f\|_1 \geq 0$$
Also gilt $\int f\,\mathrm{d}x \leq \int g\,\mathrm{d}x$. $\square$

Satz 9. *Seien f, g integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Weiterhin sei g beschränkt. Dann ist auch fg integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion h existiert mit $\|fg - h\|_1 \leq \varepsilon$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wähle $c > 0$ mit $|g| \leq c$. Sei dann h_0 eine Treppenfunktion $\|f - h_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2c}$. Wähle $d > 0$ mit $|h_0| \leq d$. Dann existiert eine Treppenfunktion h_1 mit $\|g - h_1\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2d}$. Wegen
$$|fg - h_0h_1| \leq |f - h_0||g| + |h_0||g - h_1|$$
folgt dann
$$\|fg - h_0h_1\|_1 \leq c\|f - h_0\|_1 + d\|g - h_1\|_1 \leq \varepsilon$$
Aber h_0h_1 ist eine Treppenfunktion. $\square$

Bemerkung. Seien f, g integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind auch $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ integrierbar. Also erhält man folgendes: Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und setze $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$. Dann sind $f^+, f^- \geq 0$, $f = f^+ - f^-$ und wegen oben ist f genau dann integrierbar, wenn f^+ und f^- integrierbar sind.

Definition. Sei nun $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $A \subseteq D$. Wir definieren dann $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch
$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$
f heißt *über A integrierbar*, falls f_A integrierbar ist. Wir setzen dann
$$\int_A f\,\mathrm{d}x = \int f_A\,\mathrm{d}x$$
Dies ist das Integral von f über A. Ist $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, so ist f integrierbar, wenn f über A integrierbar ist. Dieses verhält sich natürlich auch linear und monoton.

Satz 10. *Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f über I integrierbar und es gilt*
$$\int_I f\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Ist $h\colon I \to \mathbb{R}$, so gilt $|h_I| \leq \|h\| 1_I$. Also erhält man $\|h_I\|_1 \leq \|h\| \|1_I\|_1$. Sei also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\| = 0$. Dann ist $f_{k,I}$ eine Treppenfunktion (im neuen Sinn) und es gilt nach voriger Abschätzung $\lim_{k\to\infty} \|f_I - f_{k,I}\|_1 = 0$. Somit ist f_I integrierbar und es gilt
$$\int_I f\,\mathrm{d}x = \int f_I\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_{k,I}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Wir wollen nun zeigen, das für stetige Funktionen $A \to \mathbb{R}$ mit "gutem" A über A integrierbar ist.

Definition. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $D_n \to \overline{\mathbb{R}}$. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), wenn $f_k \leq f_{k+1}$ (bzw. $f_{k+1} \leq f_k$) für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 11 (Kleiner Satz von Levi)**.** *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende oder fallende Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ derart, dass die Folge $\left(\int f_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Definiere $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Wie üblich genügt es den Fall zu betrachten, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $f - f_k = \sum_{i=k}^{\infty}(f_{i+1} - f_i)$. Nach Lemma 4 gilt also

$$\|f - f_k\|_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|_1 \overset{\text{L.6}}{=} \sum_{i=k}^{\infty}\Big(\int f_{i+1} \,\mathrm{d}x - \int f_i \,\mathrm{d}x\Big)$$

Die Folge $\left(\int f_k \,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach Voraussetzung beschränkt. Somit ist sie konvergent. Sei also $a = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$. Dann ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\|f - f_k\|_1 \leq a - \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Also ist $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Lemma 12. *Seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq U$. Weiterhin sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen $g, h \geq 0$ mit*

1. *$f(x) \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in K$.*
2. *$f(x) - \varepsilon \leq h(x) \leq f(x)$ für alle $x \in K$.*
3. *$g(x) = h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$.*

Beweis. Da K kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$ für alle $a, b \in K$ mit $\|a - b\|_\infty \leq \delta$. Für jedes $x \in K$ wähle einen offenen Quader $Q(x)$ mit $x \in Q(x) \subseteq U$ und Kantenlänge $\leq \delta$. Dann ist $\mathcal{F} = \{Q(x)\colon x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Also wegen K kompakt existieren $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit $K \subseteq Q(x_1) \cup \cdots \cup Q(x_m)$. Setze $Q_i = Q(x_i)$, und weiterhin sei $c_i = \sup f(Q_i)$, $d_i = \inf f(Q_i)$. Hiermit definiere dann

$$\begin{aligned} g &= \max(c_1 1_{Q_1}, \ldots, c_m 1_{Q_m}) \\ h &= \min(d_1 1_{Q_1}, \ldots, d_m 1_{Q_m}) \end{aligned}$$

Dann sind g, h wie gewünscht. □

Definition. Sei A eine Menge. A ist *abzählbar*, wenn $A = \emptyset$ oder es existiert eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$.

Bemerkung. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbaren Mengen. Dann ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ wieder abzählbar.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $A_n \neq \emptyset$. Sei also $A_n = \{a_{nk} \colon k \in \mathbb{N}\}$. Man erhält eine Abzählung von $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ wie folgt:

$$
\begin{tikzcd}
a_{00} \arrow[d] & a_{01} \arrow[r] & a_{02} \arrow[dl] & a_{03} \arrow[r] & a_{04} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{10} \arrow[ur] & a_{11} \arrow[dl] & a_{12} \arrow[ur] & a_{13} \arrow[dl] & a_{14} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{20} \arrow[d] & a_{21} \arrow[ur] & a_{22} \arrow[dl] & a_{23} \arrow[ur] & a_{24} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{30} \arrow[ur] & a_{31} \arrow[dl] & a_{32} \arrow[ur] & a_{33} \arrow[dl] & a_{34} \arrow[ur] & \cdots \\
\vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Bemerkung. Sind A, B abzählbar, so ist auch $A \times B$ abzählbar. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Lemma 13.
(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann existieren kompakte Mengen A_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.
(b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann existieren offene Mengen U_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

Beweis.
zu (a) Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ sei $\overline{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x,a) < \varepsilon\}$. Dann ist $\overline{U}_\varepsilon(a)$ kompakt. Setze nun

$$\mathfrak{M} = \{\overline{U}_{1/(m+1)}(a) \colon a \in U \cap \mathbb{Q}^n,\ m \in \mathbb{N},\ \overline{U}_{1/(m+1)}(a) \subseteq U\}$$

Dann ist $\mathfrak{M}$ abzählbar und die Elemente von $\mathfrak{M}$ sind kompakt. Ohne Einschränkung sei $U \neq \emptyset$. Sei dann $\mathfrak{M} = \{A_k \colon k \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. "$\supseteq$" ist klar. Sei also $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Nun existiert $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}^n$ mit $d(x,a) \leq \frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $x \in \overline{U}_{1/(n+1)}(a) \subseteq U$. Also $\overline{U}_{1/(n+1)}(a) = A_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

zu (b) $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen. Also existieren nach (a) kompakte Mengen A_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Dann ist aber $A = \bigcap_{k=0}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus A_k)$ und $\mathbb{R}^n \setminus A_k$ ist offen. $\square$

Lemma 14. *Sei $f \colon A \to \mathbb{R}$ stetig, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $f \geq 0$. Dann gilt:*

(a) Ist A offen, so gibt es eine monoton wachsende Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ≥ 0, die punktweise gegen f_A konvergiert.
(b) Ist A kompakt, so gibt es eine monoton fallende Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ≥ 0, die punktweise gegen f_A konvergiert.

Beweis.

(a) Nach Lemma 13(a) wähle kompakte Mengen A_k mit $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Wir können ohne Einschränkung einnehmen, dass $A_k \subseteq A_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 12 wähle für $k \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $\tilde{h}_k \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} f(x) - \tfrac{1}{k+1} \leq \tilde{h}_k(x) \leq f(x) \qquad & \text{falls } x \in A_k \\ \tilde{h}_k(x) = 0 \qquad & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A_k \end{aligned}$$

Setze nun für $k \in \mathbb{N}$ $h_k = \max(\tilde{h}_0, \ldots, \tilde{h}_k)$. Dann ist $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie gewünscht.

(b) Nach Lemma 13(b) wähle offene Mengen U_k mit $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $U_{k+1} \subseteq U_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 12 wähle für $k \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $\tilde{g}_k \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} f(x) \leq \tilde{g}_k(x) \leq f(x) + \tfrac{1}{k+1} \qquad & \text{falls } x \in A \\ \tilde{g}_k(x) = 0 \qquad & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus U_k \end{aligned}$$

Setze nun für $k \in \mathbb{N}$ $g_k = \min(\tilde{g}_0, \ldots, \tilde{g}_k)$. Dann ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie gewünscht. □

Satz 15. *Jede stetige Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.*

Beweis. Da f^+ und f^- auch stetig sind, genügt es dies für den Fall $f \geq 0$ zu zeigen. Nach Lemma 14(b) existiert eine monoton fallende Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ≥ 0, die punktweise gegen f_K konvergiert. Nach dem kleinen Satz von Levi genügt es also zu zeigen, dass die Folge $(\int g_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dies ist aber klar, da $\int g_k \,\mathrm{d}x \geq \int g_{k+1} \,\mathrm{d}x \geq 0$. □

Satz 16. *Jede beschränkte stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer beschränkten offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.*

Beweis. Es genügt dies wieder für $f \geq 0$ zu zeigen. Nach Lemma 14(a) existiert eine monoton wachsende Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f_U konvergiert. Nach dem kleinen Satz von Levi genügt es wieder zu zeigen, dass die Folge $(\int h_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wähle hierzu einen Quader Q mit $U \subseteq Q$ und eine obere Schranke c von f. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$: $h_k \leq f_U \leq c \cdot 1_Q$, also

$$\int h_k \,\mathrm{d}x \leq \int c \cdot 1_Q \,\mathrm{d}x$$

□

Lemma 17. *Seien $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ eine Treppenfunktion. Weiterhin ist $F(y) = \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}x$ eine Treppenfunktion, und es gilt*

$$\int f(x, y) \,\mathrm{d}(x, y) = \int_Y F(y) \,\mathrm{d}y$$

Man schreibt dies kurz als

$$\int f(x, y) \,\mathrm{d}(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Beweis. Wegen Linearität genügt es dies zu zeigen für den Fall $f = 1_Q$ für einen Quader $Q \subseteq X \times Y$. Dann ist aber $Q = P \times S$ für einen Quader $P \subseteq X$ und einen Quader $S \subseteq Y$. Somit ist für $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ gleich 1_P für $y \in S$ und gleich 0 für $y \in Y \smallsetminus S$. Somit ist $F = v(P)1_S$ und daher

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = v(Q) = v(P)v(S) = v(P)\int 1_S\,\mathrm{d}y = \int F(y)\,\mathrm{d}y \qquad \square$$

Korollar. *Sei alles wie oben. Dann gilt*

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Notation. Sei $A \subseteq X \times Y$. Setze dann für $y \in Y$

$$A_y = \{x \in X \colon (x,y) \in A\}$$

und für $x \in X$

$$A_x = \{y \in Y \colon (x,y) \in A\}$$

Satz 18. *Sei $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$. Weiterhin sei $A \subseteq X \times Y$ eine kompakte oder eine beschränkte offene Menge und $f \colon A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar (als Funktion auf A_y). Weiterhin ist $F(y) = \int_{A_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ integrierbar und es gilt*

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_Y F(y)\,\mathrm{d}y$$

Man schreibst dies kurz als

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Beweis. Sei zuerst A offen und beschränkt. Es genügt wieder den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Sei nach Lemma 14(a) $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f_A konvergiert. Für jedes $y \in Y$ ist also $(x \mapsto h_k(x,y))_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf X, die gegen die Funktion $x \mapsto f_A(x,y)$ punktweise konvergiert. Wie im Beweis von Satz 16 zeigt man, dass die Folge $\left(\int_X h_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Nach dem kleinen Satz von Levi ist also $x \mapsto f_A(x,y)$ integrierbar, und es gilt

$$F(y) = \lim_{k\to\infty}\int_X h_k(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Die Integrierbarkeit von F erhalten wir auch aus Levi. Die Funktionen

$$H_k(y) = \int_X h_k(x,y)\,\mathrm{d}x$$

sind Treppenfunktionen, $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen F. Weiterhin ist die Folge $(\int H_k(y)\,\mathrm{d}y)_{k\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt, denn nach Lemma 17 ist

$$\int H_k(y)\,\mathrm{d}y = \int h_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \leq \int f_A(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Also ist nach Levi

$$\int F(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int H_k(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int h_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int f_A(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Der Fall einer kompakten Menge A wird analog behandelt. □

Korollar. *Sei alles wie oben. Dann gilt*

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel. Integration von stetigen Funktionen auf einem kompakten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^2$: Seien $I = [a,b]$ und $J = [c,d]$, $Q = I \times J$ und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$Q_y = \begin{cases} I & \text{für } y \in J \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int \int_{Q_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_J \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_J \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Also etwa für $f(x,y) = x + y$.

$$\int_a^b (x+y)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} + (b-a)y$$

$$\int_Q (x+y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \frac{b^2-a^2}{2} + (b-a)y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(b^2-a^2)(d-c) + \frac{1}{2}(b-a)(d^2-c^2)$$

Beispiel. Integration von stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen Kreis um den Nullpunkt: Sei $r > 0$ und $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$. Setze $J = [-r,r]$. Hier ist für $y \in J$

$$K_y = \left[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}\right]$$

und für $y \in \mathbb{R} \setminus J$ ist $K_y = \emptyset$. Also:

$$\begin{aligned} \int_K f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int \int_{K_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_J \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Für die Integration von stetigen Funktionen auf Quadern bzw. Kugeln im $\mathbb{R}^3$ muss man dieses Verfahren zweimal anwenden.

Bemerkung. Mit dem Korollar zu Satz 18 erhält man für stetiges $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ die Vertauschungsregel

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Definition. Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$. A ist *integrierbar*, wenn 1_A integrierbar. Ist dies der Fall, so heißt $v(A) := \int 1_A\,\mathrm{d}x$ das *Volumen* oder *Maß* von A. Manchmal schreiben wir auch $v_n(A)$ statt $v(A)$. Für Quader stimmt diese Definition mit der früheren überein.

Bemerkung. Nach Satz 15 und Satz Satz 16 sind kompakte und beschränkte offene Mengen integrierbar.

Bemerkung. Sind A, B integrierbar und $A\subseteq B$, so ist $v(A)\le v(B)$.

Beispiel. Sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f\ge 0$. Setze $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$. Dann ist A integrierbar und es gilt

$$v(A) = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit Satz 18 erhält man z.B. für kompakte Mengen $A\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$

$$v(A) = \int v(A_y)\,\mathrm{d}y$$

Ist also etwa $B\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt, $h\ge 0$, $Z=B\times[0,h]$ der Zylinder mit der Basis B und Höhe h, so gilt $v(Z)=hv(B)$.

Bemerkung. Ist $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ und $A\subseteq\mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist f über A integrierbar.

Beweis. $f_A = f\cdot 1_A$. Also folgt die Behauptung aus Satz 9. □

Definition. Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$. A ist eine Nullmenge, wenn A integrierbar ist und $v(A)=0$ gilt.

Bemerkung. Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Dann ist A genau dann eine Nullmenge, wenn $\|1_A\|_1=0$.

Beweis. Ist A Nullmenge, so nach Satz 7

$$0 = \int 1_A\,\mathrm{d}x = \|1_A\|_1$$

Sei umgekehrt $\|1_A\|_1=0$. Setze $f_k=0$ für $k\in\mathbb{N}$. Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty}\|1_A-f_k\|=0$. Also ist A integrierbar und

$$\int 1_A\,\mathrm{d}x = 0$$

□

Folgerung. Ist B eine Nullmenge und $A \subseteq B$, so ist A eine Nullmenge, denn $\|1_A\|_1 \leq \|1_B\|_1 = 0$.

Satz 19. *Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.*

Beweis. Seien A_k Nullmengen für $k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Dann ist

$$\|1_A\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|1_{A_k}\|_1 = 0$$ □

Bemerkung. Insbesondere ist also jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, da jede Einermenge eine Nullmenge ist. (Also ist $\mathbb{R}$ nicht abzählbar).

Definition. Sei E eine Eigenschaft von Punkten $\mathbb{R}^n$. Man sagt dann, *fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ haben die Eigenschaft E* oder *fast überall gilt E*, wenn die Menge aller Punkte, für die E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Satz 20. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\|f\|_1 < \infty$. Dann sind die Werte von f fast überall endlich.*

Beweis. Setze $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) = \infty \text{ oder } f(x) = -\infty\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $1_A \leq \varepsilon|f|$, also $\|1_A\|_1 \leq \varepsilon\|f\|_1$. Somit $\|1_A\|_1 = 0$. □

Satz 21 (Modifikationssatz)**.** *Seien f und g Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall gleich sind. Weiterhin sei f integrierbar. Dann ist auch g integrierbar und es gilt*

$$\int g \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \neq g(x)\}$ und sei $h = \infty 1_A$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $h_k = 1_A$. Dann ist $h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k$, also

$$\|h\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|h_k\| = 0$$

Wähle eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$. Wegen $|g - h_k| \leq |f - f_k| + h$ gilt dann

$$\|g - f_k\|_1 \leq \|f - f_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Also ist auch $\lim_{k\to\infty} \|g - f_k\|_1 = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 22. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn f fast überall gleich 0 ist.*

Beweis. Ist f fast überall 0, so ist nach Satz 21 f integrierbar und es gilt $\|f\|_1 = \int |f| \,\mathrm{d}x = 0$. Sei umgekehrt $\|f\|_1 = 0$. Setze $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \neq 0\}$. Dann ist $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$. Aber jedes A_k ist eine Nullmenge, denn wegen $1_{A_k} \leq k|f|$ folgt $\|1_{A_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0$. Somit ist nach Satz 19 A eine Nullmenge. □

Korollar. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $f \geq 0$ und $\int f \,\mathrm{d}x = 0$. Dann ist f fast überall gleich 0.*

Beweis.

$$\|f\|_1 = \int f \,\mathrm{d}x$$

□

Satz 23. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine integrierbare offene Menge U mit $A \subseteq U$ und $v(U) < \varepsilon$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\|2 \cdot 1_A\|_1 = 0$ gibt es eine Hüllreihe $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ von $2 \cdot 1_A$ mit $I(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) < \varepsilon$. Für $m \in \mathbb{N}$ setze $f_m = \sum_{k=0}^{m} c_k 1_{Q_k}$. Dann ist f_m eine Treppenfunktion. Die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und die Folge $(\int f_m \,\mathrm{d}x)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn

$$\int f_m \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} c_k v(Q_k) < \varepsilon$$

Wegen $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ ist also nach Levi φ integrierbar, und es gilt

$$\int \varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x = I(\varphi)$$

Setze nun $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(x) > 1\}$. Da φ eine Hüllreihe von $2 \cdot 1_A$ ist, ist $A \subseteq U$. Weiterhin ist U offen, denn sei $a \in U$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m(a) > 1$. Sei V der Durchschnitt der endlich vielen Q_i mit $i \leq m$ und $a \in Q$. Dann ist V offen und für alle $x \in V$ ist $f_m(x) \geq f_m(a) > 1$. Also ist $V \subseteq U$ und natürlich $a \in V$.

Schließlich zeigen wir noch, dass U integrierbar ist mit $v(U) < \varepsilon$. Nach Lemma 14(a) gibt es eine monton wachsende Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die punktweise gegen 1_U konvergiert. Die Folge $(\int g_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn $g_k \leq 1_U \leq \varphi$, also $\int g_k \,\mathrm{d}x \leq \int \varphi \,\mathrm{d}x = I(\varphi) < \varepsilon$. Also ist nach Levi 1_U integrierbar, und es gilt $v(U) = \int 1_U \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x \leq \int \varphi \,\mathrm{d}x < \varepsilon$. □

Wir benötigen noch die folgende Verstärkung von Lemma 13(a).

Lemma 24. *Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben.*

Beweis. Fur $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{M}_k$ die Menge aller Quader der Form $Q = I_1 \times \ldots I_n$ mit $I_j = [m_j/2^k, (m_j+1)/2^k]$ für genauso $m_j \in \mathbb{Z}$. $\mathfrak{M}_k$ ist abzählbar. Weiterhin gilt für $Q \in \mathfrak{M}_k$ und $P \in \mathfrak{M}_i$ mit $k \leq i$, dass sich Q und P nur an Randpunkten schneiden, oder $P \subseteq Q$. Wir schöpfen nun U rekursiv mit diesen Quadern aus. Sei also $\mathfrak{M}_0^* = \{Q \in \mathfrak{M}_0 \colon Q \subseteq U\}$. Für $k > 0$ sei $\mathfrak{M}_k^*$ die Menge aller $Q \in \mathfrak{M}_k$ mit $Q \subseteq U$, die in keinem $P \in \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathfrak{M}_i^*$ enthalten sind. Setze $\mathfrak{M}^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k^*$. Dann ist $\mathfrak{M}^*$ abzählbar. Sei also $\mathfrak{M}^* = \{Q_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ (o.E. sei $U \neq \emptyset$). Nach Konstruktion genügt es zu zeigen, dass $U = \bigcup_{j=0}^{\infty} Q_j$. Offenbar gilt "$\supseteq$". Sei umgekehrt $a \in U$. Wegen U offen existiert dann ein $k \in \mathbb{N}$ und eine $Q \in \mathfrak{M}_k$ mit $a \in Q \subseteq U$. Nach Konstruktion ist dann $Q \in \mathfrak{M}_k^*$ oder es existiert $P \in \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathfrak{M}_i^*$ mit $Q \subseteq P$. In beiden Fällen ist $a \in \bigcup_{j=0}^{\infty} Q_j$. □

Satz 25. *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$ gibt.*

Beweis. Sei A eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 23 existiert dann eine integrierbare offene Menge U mit $A \subseteq U$ und $v(U) < \varepsilon$. Wähle hierzu $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ wie in Lemma 24. Da die Q_k nur Randpunkte gemeinsam haben gilt dann für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} v(Q_k) = v\Big(\bigcup_{k=0}^{m} Q_k\Big) \leq v(U)$$

Also $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) \leq v(U) < \varepsilon$.

Sei umgekehrt die rechte Seite erfüllt. Für $\varepsilon > 0$ wähle $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie dort. Dann gilt $1_A \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1_{Q_k}$ und daher $\|1_A\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $\|1_A\|_1 = 0$, also ist A eine Nullmenge. □

Wir zeigen noch folgende Verstärkung von Satz 15.

Satz 26. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ist dann $A = \{x \in K\colon f \text{ ist nicht stetig in } x\}$ eine Nullmenge, so ist f integrierbar.*

Beweis. Sei c eine obere Schranke für $|f|$. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion g gibt mit $\|f_K - g\|_1 < \varepsilon$. Wähle nach Satz 23 eine offene Menge U mit $A \subseteq U$ und $c \cdot v(U) < \varepsilon/2$. Dann ist $K \setminus U$ kompakt. Also ist nach Satz 15 f über $K \setminus U$ integrierbar. Somit existiert eine Treppenfunktion g mit $\|f_{K\setminus U} - g\|_1 < \varepsilon/2$. Weiterhin ist $\|f_U\|_1 \leq c \cdot v(U) < \varepsilon/2$. Somit

$$\|f_K - g\|_1 \leq \|f_{K\setminus U} - g\|_1 + \|f_U\|_1 < \varepsilon$$ □

17 Konvergenzsätze, Satz von Fubini

$\|\cdot\|_1$ ist nur eine Halbnorm. Dennoch können wir hiermit eine Konvergenztheorie aufbauen.

Definition. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist *L^1-konvergent* gegen f und f heißt dann ein *L^1-Grenzwert* von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$.

Bemerkung. Da $\|\cdot\|_1$ nur eine Halbnorm ist, ist ein L^1-Grenzwert von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht eindeutig bestimmt. Wie üblich zeigt man nur: Sind f, g L^1-Grenzwerte von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist $\|f - g\|_1 = 0$, d.h. nach Satz 22 aus Paragraph 16 ist f fast überall gleich g.

Definition. Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist ein *L^1-Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, mit $\|f_k - f_m\|_1 < \varepsilon$ für alle $k \geq m$.

Bemerkung. Wie üblich zeigt man:

(1) Jede L^1-konvergente Folge ist eine L^1-Cauchyfolge.

(2) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge, so existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|f_j - f_k\|_1 < \varepsilon$ für alle $j, k \geq m$.

Satz 1 (Riesz-Fischer)**.** *Jede L^1-Cauchyfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt eine L^1-Grenzwert f. Für jedes solche f gilt*

(1) f ist integrierbar und $\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$.

(2) Eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Beweis. Wir definieren rekursiv Indizes $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ mit $\|f_k - f_{k_i}\|_1 \leq 1/2^i$ für alle $k \geq k_i$. Für $i \in \mathbb{N}$ setze $g_i = f_{k_{i+1}} - f_{k_i}$ und hiermit $g = \sum_{i=0}^{\infty} |g_i|$. Es gilt dann

$$\|g\|_1 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|g_i\|_1 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Somit existiert eine Nullmenge A mit $g(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. (O.E. sei auch $f_{k_i}(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$) Also konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ fast überall absolut. Definiere nun f durch

$$f(x) = \begin{cases} f_{k_0}(x) + \sum\limits_{i=0}^{\infty} g_{k_i}(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \\ 0 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

Also ist $f(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen alle Eigenschaften für diese f. Dies genügt. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ist $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)$. Also gilt (2). Weiterhin ist f integrierbar, denn sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein m mit $\sum_{i=m}^{\infty} \|g_i\|_1 \leq \varepsilon$ und $\|f_k - f_{k_m}\|_1 \leq \varepsilon$ für $k \geq m$. Sei h eine Treppenfunktion mit $\|f_{k_m} - h\|_1 \leq \varepsilon$. Dann ist

$$\|f - h\|_1 \leq \|f - f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m} - h\|_1 \leq \Big\| \sum_{i=m}^{\infty} g_i \Big\|_1 + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Außerdem ist für $k \geq k_m$

$$\|f - f_k\|_1 \leq \|f - f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m} - f_k\|_1 \leq 2\varepsilon$$

Also ist f ein L^1-Grenzwert von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Schließlich folgt (1) wegen

$$\Big| \int f \,\mathrm{d}x - \int f_k \,\mathrm{d}x \Big| \leq \int |f - f_k| \,\mathrm{d}x = \|f - f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \square$$

Korollar. *Jede integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ ist L^1-Grenzwert einer Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit den Eigenschaften*

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} ||g_{k+1} - g_k\|_1 < \infty$.

(2) $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Beweis. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_1 = 0$. Diese besitzt dann nach dem obigen Beweis eine Teilfolge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die die Eigenschaft (1) hat und fast überall punktweise gegen eine L^1-Grenzwert f^* konvergiert. Dann sind aber f und f^* fast überall gleich, also gilt auch (2). □

Satz 2 (Levi)**.** *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende oder fallende Folge von integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ derart, dass die Folge $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Definiere $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Dann ist auch die Folge $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach Voraussetzung beschränkt. Also ist sie konvergent. Wir zeigen zuerst, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\int f_k \,\mathrm{d}x - \int f_m \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

für alle $k \geq m$. Dann gilt aber für $k \geq m$ wegen Monotonie

$$\|f_k - f_m\|_1 = \int |f_k - f_m \,\mathrm{d}x = \int f_k \,\mathrm{d}x - \int f_m \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

Nach Satz 1 besitzt also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen integrierbaren L^1-Grenzwert g. Weiterhin konvergiert eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen g. Also ist f fast überall gleich g. Somit ist aber wegen dem Modifikationssatz auch f integrierbar, und es gilt nach Satz 1

$$\int f \,\mathrm{d}x = \int g \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

□

Korollar. *Sei f eine Funktion auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ mit $A_k \subseteq A_{k+1}$. Sei f über A_k integrierbar für jedes $k \in \mathbb{N}$, und die Folge $(\int_{A_k} |f| \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int_A f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Wegen der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ genügt es dies für $f \geq 0$ zu zeigen. Dann ist aber $(f_{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monton wachsende Folge, die punktweise gegen f_A konvergiert. □

Satz 3 (Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz)**.** *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion g mit $|f_k| \leq g$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Nach dem Modifikationssatz können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sogar überall punktweise gegen f konvergiert. Definiere nun für $k \in \mathbb{N}$ $g_k\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ $g_k(x) = \sup\{f_i(x)\colon i \geq k\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ setze $g_{k,j} = \max(f_k, \dots, f_{k+j})$. Dann ist die Folge $(g_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ monton wachsend, die $g_{k,j}$ sind integrierbar, und die Folge der Integrale $(\int g_{k,j}\,\mathrm{d}x)_{j\in\mathbb{N}}$ ist durch $\int g\,\mathrm{d}x$ nach oben beschränkt. Da die Folge $(g_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen g_k konvergiert, ist also nach dem Satz von Levi g_k integrierbar, und es gilt

$$\int g_k\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} \int g_{k,j}\,\mathrm{d}x \leq \int g\,\mathrm{d}x$$

Weil aber auch $-g_{k,j} \leq g$ gilt, folgt

$$\left| \int g_k\,\mathrm{d}x \right| \leq \int g\,\mathrm{d}x$$

Nun ist aber $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und konvergiert punktweise gegen f. Somit ist nach Levi f integrierbar und es gilt

$$\int f\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k\,\mathrm{d}x$$

Definiere nun $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $h_k(x) = \inf\{f_i(x)\colon i \geq k\}$. Dann erhält man völlig analog

$$\int f\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int h_k\,\mathrm{d}x$$

Wegen $h_k \leq f_k \leq g_k$ erhält man also auch

$$\int f\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Bemerkung. Satz 3 gilt natürlich entsprechend für die Integrierbarkeit über eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Wir untersuchen nun parameterabhängige Integrale auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Satz 4. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $b \in B$ und $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Für jedes $x \in A$ ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig in b.

(2) Für jedes $y \in B$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar.

(3) Es gibt eine integrierbare Funktion $h\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f(x,y)| \leq h(x)$ für alle $(x,y) \in A \times B$.

Dann ist die durch

$$g(y) = \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

definierte Funktion $g\colon B \to \mathbb{R}$ in b stetig.

Beweis. Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus B mit $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $f_k\colon A \to \mathbb{R}$ durch $f_k(x) = f(x, b_k)$, und sei $f^*\colon A \to \mathbb{R}$ definiert durch $f^*(x) = f(x, b)$. Wegen (1) konvergiert dann $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f^*. Wegen (2) und (3) folgt aber aus Satz 3

$$\lim_{k\to\infty} g(b_k) = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k \,\mathrm{d}x = \int_A f^* \,\mathrm{d}x = g(b) \qquad \square$$

Satz 5. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon A \times U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Für jedes $x \in A$ ist die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar.

(2) Für jedes $y \in U$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ integrierbar.

(3) Es gibt eine integrierbare Funktion $h\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)\right| \leq h(x), \quad \textit{für alle } (x, y) \in A \times U \textit{ und alle } 1 \leq i \leq m$$

Dann ist die durch

$$g(y) = \int_A f(x, y) \,\mathrm{d}x$$

definierte Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiterhin ist für jedes $y \in U$ und $1 \leq i \leq m$ die Funktion $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)$ integrierbar und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) \,\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

Beweis. Sei $b \in U$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ so, dass alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $\|y - b\|_\infty < \varepsilon$ in U liegen. Sei $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $0 < |h_k| < \varepsilon$. Sei $1 \leq i \leq m$ und setze $b_k = b + h_k e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^m$ ist. Definiere $g_k\colon A \to \mathbb{R}$ durch

$$g_k(x) = \frac{f(x, b_k) - f(x, b)}{h_k}$$

Die g_k sind nach Voraussetzung integrierbar, und für jedes $x \in A$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b)$$

Weiterhin ist nach dem Mittelwertsatz wegen (3) $|g_k| \leq h$. Somit ist nach Satz 3 auch die Funktion $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b)$ integrierbar, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_A g_k \,\mathrm{d}x = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b) \,\mathrm{d}x$$

Aber

$$\int_A g_k \,\mathrm{d}x = \frac{g(b_k) - g(b)}{h_k}$$

Somit existiert die i-te partielle Ableitung von g in b, und es gilt $(*)$. Wegen $(*)$ folgt dann aus Satz 4, dass $\frac{\partial g}{\partial y_i}$ stetig ist. Also ist g stetig differenzierbar. $\square$

Definition. Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. f ist *lokal-integrierbar*, wenn es über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

Beispiel. Jede stetige Funktion ist lokal-integrierbar.

Bemerkung. Ist f eine lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so ist f über jeder beschränkten integrierbaren Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar.

Bemerkung. Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(1) f ist lokal-integrierbar.

(2) Für alle $r > 0$ ist f über $U_r(0)$ integrierbar.

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Umgebung U von x, so dass f über U integrierbar ist.

Beweis.
(1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus obiger Bemerkung.
(2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial.
(3) $\Rightarrow$ (1) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Für alle $x \in K$ wähle eine offene Umgebung $U(x)$ von x, so dass f über $U(x)$ integrierbar ist. Dann ist $\mathcal{U} = \{U(x) \colon x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Also existieren endlich viele $x_1, \dots, x_m \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m U(x_i)$. Aber f ist über $\bigcup_{i=1}^m U(x_i)$ integrierbar, und damit auch über K. ☐

Bemerkung. Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn f lokal-integrierbar ist und $\|f\|_1 < \infty$ gilt.

Satz 6. *Seien f eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und g eine beschränkte lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist fg integrierbar.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $|g| \leq c$. Nach Satz 9 aus §16 ist fg lokal integrierbar, und es gilt $\|fg\|_1 \leq c\|f\|_1 < \infty$. ☐

Definition. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist *messbar*, wenn 1_A lokal-integrierbar ist. Ist dies der Fall, so setze $v(A) = \|1_A\|_1$ (*Volumen* oder Maß von A). Dies stimmt für integrierbare Mengen mit der früheren Definition überein.

Bemerkung. Sei f integrierbar und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist f über A integrierbar.

Satz 7.
(a) Die messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bilden eine σ-Algebra, d.h. es gilt

(i) $\mathbb{R}^n$ ist messbar.

(ii) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $\mathbb{R}^n \setminus A$.

(iii) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen, so ist $\bigcup_{k=0}^\infty A_k$ messbar.

(b) $v(\emptyset) = 0$, $v(\mathbb{R}^n) = \infty$ und $v(A) \geq 0$ für alle messbaren A.

(c) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten messbaren Mengen. Dann ist

$$v\Big(\bigcup_{k=0}^\infty A_k\Big) = \sum_{k=0}^\infty v(A_k)$$

Beweis.

zu (a) (i) ist trivial.

zu (ii) Es gilt $1_{\mathbb{R}^n \setminus A} = 1 - 1_A$.

zu (iii) Für $m \in \mathbb{N}$ setze $B_m = \bigcup_{k=0}^m A_k$ und setze $A = \bigcup_{k=0}^\infty A_k$. Durch Induktion folgt, dass jedes B_m messbar ist. Also folgt aus dem Korollar zum Satz von Levi, dass $A = \bigcup_{m=0}^\infty B_M$ messbar ist.

zu (b) Trivial.

zu (c) Setze wieder $B_m = \bigcup_{k=0}^m A_k$ und sei $A = \bigcup_{k=0}^\infty A_k$. Da die A_k paarweise disjunkt sind, ist $v(B_m) = \sum_{k=0}^m v(A_k)$. Ist B_m nicht integrierbar, so auch A und die Behauptung ist trivial. Ist die Folge $(v(B_m))_{m\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt, so ist $v(A) = \infty$, also klar. Sei also $(v(B_m))_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Wegen $A = \bigcup_{m=0}^\infty B_m$ ist aber dann nach dem Korollar zum Satz von Levi A integrierbar und

$$v(A) = \int_A 1 \,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} 1 \,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} v(B_m) = \sum_{k=0}^\infty v(A_k) \qquad \square$$

Bemerkung. Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, so ist auch $\bigcap_{k=0}^\infty A_k$ messbar, denn

$$\bigcap_{k=0}^\infty A_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=0}^\infty (\mathbb{R}^n \setminus A_k)$$

Wir wollen nun den vollen Satz von Fubini beweisen. Hierzu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 8. *Seien $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $A \subseteq X \times Y$ eine Nullmenge. Dann gibt es eine Nullmenge $B \subseteq Y$ derart, dass $A_y = \{x \in X : (x,y) \in A\}$ für alle $y \in Y \setminus B$ eine Nullmenge ist.*

Beweis. Definiere $f: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(y) = \|1_{A_y}\|_1$. Es genügt zu zeigen, dass $\|f\|_1 = 0$, denn dann ist nach Satz 23 aus §16 f fast überall gleich 0, d.h. fast überall ist A_y eine Nullmenge. Sei also $\varepsilon > 0$. Da A eine Nullmenge ist, gibt es nach Satz 25 aus §16 eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $X \times Y$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=0}^\infty Q_k$ und $\sum_{k=0}^\infty v(Q_k) < \varepsilon$. Für $k \in \mathbb{N}$ existieren Quader $P_k \subseteq X$ und $S_k \subseteq Y$ mit $Q_k = P_k \times S_k$. Es ist $v(Q_k) = v(P_k)v(S_k)$. Wegen $1_{A_y} \le \sum_{k=0}^\infty 1_{P_k} \cdot 1_{S_k}(y)$ erhalten wir

$$f(y) = \|1_{A_y}\|_1 \le \sum_{k=0}^\infty \|1_{P_k}\|_1 \cdot 1_{S_k}(y) = \sum_{k=0}^\infty v(P_k) 1_{S_k}(y)$$

und daher

$$\|f\|_1 \le \Big\| \sum_{k=0}^\infty v(P_k) 1_{S_k} \Big\|_1 \le \sum_{k=0}^\infty v(P_k) \|1_{S_k}\|_1 = \sum_{k=0}^\infty v(P_k) v(S_k) = \sum_{k=0}^\infty v(Q_k) < \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|f\|_1 = 0$. $\square$

Satz 9 (Fubini)**.** *Seien $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt:*

(a) Es existiert eine Nullmenge $B \subseteq Y$ derart, dass für alle $y \in Y \setminus B$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar ist.

(b) Definiert man die Funktion $F\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$F(y) = \begin{cases} \int f(x,y)\,\mathrm{d}x & \text{falls } y \in Y \setminus B \\ 0 & \text{falls } y \in B \end{cases}$$

so ist F integrierbar, und es gilt

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int F(y)\,\mathrm{d}y$$

Wir schreiben hierfür kurz

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Weiterhin gilt auch mit der analogen Interpretation

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Nach dem Korollar zu Satz 1 wähle eine Folge von Treppenfunktionen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_1 = 0$ und

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_1 < \infty.$

(2) $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq X \times Y$ punktweise gegen f.

Für $y \in Y$ seien $g_{k,y}$ und f_y definiert durch $g_{k,y}(x) = g_k(x,y)$, $f_y(x) = f(x,y)$. Die $g_{k,y}$ sind natürlich Treppenfunktionen. Lemma 8 angewandt auf A liefert die Existenz einer Nullmenge $C \subseteq Y$ mit

(3) Für $y \in Y \setminus C$ konvergiert $(g_{k,y})_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen f_y.

Definiere nun $H_k\colon Y \to \mathbb{R}$ durch $H_k(y) = \int |g_{k+1,y} - g_{k,y}|\,\mathrm{d}x$. Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen gilt

$$\int H_k(y)\,\mathrm{d}y = \int |g_{k+1} - g_k|\,\mathrm{d}(x,y) = \|g_{k+1} - g_k\|_1$$

und daher nach (1)

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int H_k(y)\,\mathrm{d}y < \infty.$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} H_k$ wächst monoton, und die Integrale der Partialsummen sind nach (4) beschränkt. Also ist nach Levi $\sum_{k=0}^{\infty} H_k$ integrierbar. Somit ist nach Satz 21 aus §16 $\sum_{k=0}^{\infty} H_k(y) < \infty$ für alle y außerhalb eine Nullmenge $D \subseteq Y$, d.h. es gilt

(5) $\sum_{k=0}^{\infty} \|g_{k+1,y} - g_{k,y}\|_1 < \infty$ für $y \in Y \setminus D$.

Setze nun $B = C \cup D$. Also ist B eine Nullmenge. Sei also $y \in Y \setminus B$. Wegen (5) ist dann $(g_{k,y})_{y\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge. Nach Satz 1 konvergiert Teilfolge hiervon punktweise gegen eine integrierbare Funktion f_y^*. Wegen (3) ist aber dann f_y^* gleich f_y fast überall. Also ist auch f_y integrierbar. Damit ist (a) gezeigt.

Wegen Satz 1 gilt außerdem

(6) $F(y) = \int f(x,y)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k(x,y)\,\mathrm{d}x$ für $y \in Y \setminus B$.

Definiere nun $G_k\colon Y \to \mathbb{R}$ durch $G_k(y) = \int g_k(x,y)\,\mathrm{d}x$. Die G_k sind Treppenfunktionen. Wegen (6) gilt

(7) $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $Y \setminus B$ punktweise gegen F.

Wegen (4) und $|G_{k+1}(y) - G_k(y)| \leq H_k(y)$ gilt

(8) $\sum_{k=0}^{\infty} \|G_{k+1} - G_k\|_1 < \infty$.

Somit ist $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eien L^1-Cauchyfolge von Treppenfunktionen. Nach Satz 1 konvergiert also eine Teilfolge fast überall gegen eine integrierbare Funktion F^*. Wegen (7) ist dann F gleich F^* fast überall. und daher ist auch F integrierbar. Weiterhin ist nach Satz 1

$$\int F(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int G_k(y)\,\mathrm{d}y$$

Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen ist aber

$$\int G_k(y)\,\mathrm{d}y = \int g_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_1 = 0$ ist nach Definition

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Damit ist (b) gezeigt Der Zusatz ergibt sich aus dem Beweis. $\square$

Um Fubini anwenden zu können, muss man wissen, dass f integrierbar ist. Ein Kriterium hierfür ist:

Satz 10 (Tonelli)**.** *Seien $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ eine lokal-integrierbare Funktion. Es existiere eines der Integrale*

$$\iint |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \textit{oder} \quad \iint |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Dann ist f integrierbar.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $|f|$ integrierbar ist, denn dann ist $\|f\|_1 < \infty$. Es existiere etwa das erste Integral. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k = [-k,k]^{p+q}$ und setze $f_k = \min(|f|, k \cdot 1_{Q_k})$. Dann ist f_k integrierbar. Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton wachsend gegen $|f|$ und die Folge $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn nach Fubini angewandt auf f_k erhält man

$$\int f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint f_k(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Nach Levi ist also $|f|$ integrierbar. □

Satz 11. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lokal-integrierbar. Setze $A = \{x\colon f(x) > 0\}$ und $B = \{x\colon f(x) \geq 0\}$. Dann sind A und B messbar.*

Beweis. Setze $g = \max(f, 0)$. Dann ist g lokal-integrierbar. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $h_k = \min(kg, 1)$. Dann konvergiert die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton wachsend gegen 1_A. Also ist nach Levi A messbar. Damit ist aber auch die Menge $\{x\colon -f(x) > 0\}$ messbar, und somit auch B als deren Komplement. □

Satz 12. *Seien $f\colon \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g\colon \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$. Definiere $f \otimes g\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$ durch*

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y), \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

Dann ist $f \otimes g$ integrierbar, und es gilt

$$\int f \otimes g \,\mathrm{d}(x,y) = \int f\,\mathrm{d}x \int g\,\mathrm{d}y$$

Beweis. In den Übungen.

Satz 13. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$. Setze*

$$G = \{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\colon 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1,\dots,x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Dann ist f genau dann integrierbar, wenn G integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f\,\mathrm{d}x = v(G)$$

Beweis. Sei zuerst G integrierbar. Dann gilt nach dem Satz von Fubini

$$v(G) = \iint 1_{[0,f(x_1,\dots,x_n)]}\,\mathrm{d}x_{n+1}\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \int f\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \qquad (*)$$

Also ist f integrierbar und es gilt der Zusatz.

Sei nun umgekehrt f integrierbar. Definiere $g\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = x_{n+1}\big(f(x_1,\dots,x_n - x_{n+1}\big) = x_{n+1}f(x_1,\dots,x_n) - x_{n+1}^2$$

Nach Satz 12 ist g lokal-integrierbar. Nun ist aber $G = \{x\colon g(x) \geq 0\}$. Also ist nach Satz 11 G messbar. Weiterhin existiert in $(*)$ das Integral auf der rechten Seite. Also ist nach Satz 11 G integrierbar. □

Korollar. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Setze*

$$\begin{aligned} G^+ &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\colon 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\} \\ G^- &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\colon f(x_1, \dots, x_n) \leq -x_{n+1} \leq 0\} \end{aligned}$$

Dann ist genau dann f integrierbar, wenn G^+ und G^- integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = v(G^+) - v(G^-)$$

Beweis. Betrachte die Zerlegung $f = f^+ - f^-$. □

18 Der Transformationssatz

Det Transformationssatz ist eine mehrdimensionale Version der Substitutionsregel. Hierzu folgende Vorbetrachtung:

Seien $I = [a, b]$ und $J = [\alpha, \beta]$ kompakte Intervalle und $\varphi\colon I \to J$ eine *bijektive* stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin sei $f\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Mit der Substitutionsregel folgt dann

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \,\mathrm{d}x$$

Da φ bijektiv und stetig ist, ist φ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Im ersten Fall gilt insbesondere $\varphi(a) = \alpha$ und $\varphi(b) = \beta$, im zweiten Fall $\varphi(a) = \beta$ und $\varphi(b) = \alpha$. Weiterhin ist im ersten Fall $\varphi' \geq 0$ und im zweiten $\varphi' \leq 0$. Somit liefert in beiden Fällen die obige Gleichung

$$\int_I f(\varphi(t))|\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_J f \,\mathrm{d}x$$

Für die Verallgemeinerung ist $\varphi'(t)$ zu lesen als $\det \varphi'(t)$.

Wir benötigen noch eine Definition:

Definition. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon U \to V$. Dann ist φ ein *Diffeomorphismus*, wenn gilt:

- φ ist bijektiv.
- U, V sind offen.
- φ und φ^{-1} sind stetig differenzierbar.

Bemerkung. In Analysis II haben wir gezeigt, dass für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit an jedem Punkt invertierbarer Ableitung $\varphi\colon U \to \operatorname{im} \varphi$ ein Diffeomorphismus ist.

Unser Ziel ist der folgende Transformationssatz:

Satz (Transformationssatz)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Weiterhin sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$ über U integrierbar, und es gilt*

$$\int_U f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)| \,\mathrm{d}x = \int_V f(y) \,\mathrm{d}y$$

Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen, von denen manche Spezialfälle des Transformationssatzes sind.

Definition. Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ definiere die *um a translatierte Funktion* $\tau_a f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$.

Satz 1 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals)**.** *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\tau_a f$ integrierbar, und es gilt*

$$\int f(x-a)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nach Definition $v(a+Q) = v(Q)$. Wegen Linearität ist die Behauptung für Treppenfunktionen richtig. Weiterhin folgt, dass $\|\tau_a g\|_1 = \|g\|_1$ für alle $g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, denn eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ ist genau dann eine Hüllreihe von g, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{a+Q_k}$ eine Hüllreihe von $\tau_a g$ ist. Sei also nun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$. Dann ist auch $(\tau_a f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktion, und es gilt

$$\|\tau_a f_k - \tau_a f\|_1 = \|\tau_a(f_k - f)\|_1 = \|f_k - f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Also ist auch $\tau_a f$ integrierbar und es gilt:

$$\int f(x-a)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x-a)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Bemerkung. Für eine messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist also $a + B$ messbar und $v(B) = v(a+B)$.

Lemma 2. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, d.h. es existiert ein $L \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f(x-y)\| \leq L\|x-y\|$ für alle $x, y \in A$. Dann ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Nach dem Normäquivalenzsatz existiert auch ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq c\|x-y\|_\infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach (Beweis von) Satz 25 aus §16 gibt es eine abzählbare Folge von Würfeln mit $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert dann ein Würfel W_k mit $f(Q_k) \subseteq W_k$ und $v(W_k) \leq (2c)^n v(Q_k)$. Also ist $f(A) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v(W_k) \leq (2c)^n \varepsilon$. Somit ist $f(A)$ eine Nullmenge. $\square$

Korollar. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist dann $A \subseteq U$ eine Nullmenge, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Wähle wieder eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von kompakten Quadern mit $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$. Nach dem Schrankensatz ist dann $f|Q_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ Lipschitz-stetig. Somit ist $f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge. Somit ist auch $f(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge. $\square$

Lemma 3. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterverktorraum mit* $\dim(A) < n$. *Dann ist A eine Nullmenge.*

Beweis. Setze $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n = 0\}$. B ist eine Nullmenge, denn B ist die Vereinigung von abzählbar vielen ausgearteten Quadern. Sei A erzeugt von $u_1, \dots, u_{n-1}$. Definiere $f \colon B \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k u_k$. f ist Lipschitz-stetig. Also ist $A = f(B)$ eine Nullmenge. □

Definition. Seien $u_1, \dots, u_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Setze

$$P(u_1, \dots, u_n) = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \colon 0 \le \lambda_1, \dots, \lambda_n \le 1 \Big\}$$

$P(u_1, \dots, u_n)$ ist das von $u_1, \dots, u_n$ *aufgespannte Parallelotop.* $P(u_1, \dots, u_n)$ ist also das Bild des Einheitswürfels $[0,1]^n$ unter linearen Abbildung $A = (u_1, \dots, u_n)$.

Satz 4. *Für alle* $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$v(P(u_1, \dots, u_n)) = |\det(u_1, \dots, u_n)|$$

Beweis. Nach Linearer Algebra ist die Funktion $D = |\det|$ eindeutig bestimmt durch die folgenden fünf Eigenschaften:

(D1) $D(u_1, \dots, \lambda u_k, \dots, u_n) = |\lambda| D(u_1, \dots, u_n)$

(D2) $D(u_1 + u_2, u_2, \dots, u_n) = D(u_1, \dots, u_n)$ für $n \ge 2$.

(D3) $D(e_1, \dots, e_n) = 1$

(D4) $D(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = D(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n)$ für $1 \le i < j \le n$.

(D5) $D(u_1, \dots, u_n) = 0$ für $u_1, \dots, u_n$ linear abhängig.

Also genügt es zu zeigen, dass die Funktion $(u_1, \dots, u_n) \mapsto v(P(u_1, \dots, u_n))$ diese Eigenschaften besitzt.

zu (D1) Setze $P_\lambda = P(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n)$. Wir zeigen die Behauptung zuerst für $\lambda = k \in \mathbb{N}$ durch Induktion. Für $k = 0$ ist das klar. Nun ist $P_{k+1} = P_k \cup (k u_i + P_1)$ und der Durchschnitt der letzten beiden Mengen ist nach Lemma 3 eine Nullmenge. Wegen Satz 1 folgt also

$$v(P_{k+1}) = v(P_k) + v(P_1) = (k+1) v(P)$$

Somit gilt die Behauptung auch für $\lambda \in \mathbb{Q}^+$, denn ist $\lambda = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, so $v(P_{q\lambda}) = p v(P_1)$ und $v(P_{q\lambda}) = q v(P_\lambda)$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r \le \lambda \le s$ und $s - r \le \frac{\varepsilon}{v(P)}$. Dann gilt $P_r \subseteq P_\lambda \subseteq P_s$ und somit

$$r v(P_1) = v(P_r) \le v(P_\lambda) \le v(P_s) = s v(P_1)$$

also auch $|v(P_\lambda) - \lambda v(P)| \le (s - r) v(P) \le \varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. Sei schließlich $\lambda < 0$. Wegen $P_\lambda = \lambda u_i = P_{-\lambda}$ erhält man mit Satz 1 $v(P_\lambda) = v(P_{-\lambda}) = |\lambda| v(P_1)$.

zu (D2) Setze

$$\Delta_0 = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \colon 0 \le \lambda_1, \ldots, \lambda_n \le 1 \text{ und } \lambda_2 \le \lambda_1 \Big\}$$

und

$$\Delta_1 = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \colon 0 \le \lambda_1, \ldots, \lambda_n \le 1 \text{ und } \lambda_1 \le \lambda_2 \Big\}$$

Dann ist $P(u_1, \ldots, u_n) = \Delta_0 \cup \Delta_1$ und $P(u_1 + u_2, u_2, \ldots, u_n) = (u_2 + \Delta_0) \cup \Delta_1$. Da $\Delta_0 \cap \Delta_1$ und $(u_2 + \Delta_0) \cap \Delta_1$ nach Lemma 3 Nullmengen sind, folgt also nach Satz 1 die Behauptung.

zu (D3) Klar, da $P(e_1, \ldots, e_n) = [0,1]^n$.

zu (D4) Klar, da $P(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = P(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.

zu (D5) Gilt nach Lemma 3. □

Korollar. *Sei $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann ist $v(A(Q)) = |\det A| v(Q)$ für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $A = (u_1, \ldots, u_n)$, also $u_k = Ae_k$. Weiterhin sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Ohne Einschränkung sei Q abgeschlossen. Außerdem können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $Q = [0, \lambda_1] \times \cdots \times [0, \lambda_n]$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$, denn sonst bringe Q durch Translation in diese Form und beachte, dass $A(x + Q) = Ax + A(Q)$. Dann gilt aber $A(Q) = P(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n)$, also

$$v(A(Q)) = |\det(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n)| = |\det(u_1, \ldots, u_n)| \lambda_1 \ldots \lambda_n = |\det A| v(Q) \qquad \square$$

Lemma 5. *Sei $\varphi \colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und sei $W \subseteq U$ ein kompakter Würfel. Setze $c = \max\{|\det \varphi'(x)| \colon x \in W\}$. Dann gilt $v(\varphi(W)) \le c \cdot v(W)$.*

Beweis. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. $\varphi(W)$ ist kompakt, also integrierbar. Ist $v(W) = 0$, so folgt die Behauptung aus dem Korollar zu Lemma 2. Sei also $v(W) \ne 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $v(\varphi(W)) = \alpha \cdot v(W)$. Wir müssen zeigen, dass $\alpha \le c$. Konstruiere nun rekursiv eine Folge $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von kompakten Würfeln mit

$$v(\varphi(W_k)) \ge \alpha \cdot v(W_k) \tag{$*$}$$

Setze hierzu $W_0 = W$. Zur Konstruktion von W_{k+1} “zerlege” W_k in 2^n viele kompakte Teilwürfel von halber Kantenlänge. Unter diesen gibt es dann mindestens einen Würfel W_{k+1} mit $v(\varphi(W_{k+1})) \ge \alpha \cdot v(W_{k+1})$. Nach Konstruktion besteht $\bigcap_{k=0}^{\infty} W_k$ aus genau einem Punkt a. Setze $b = \varphi(a)$. Wegen Translationsinvarianz können wir ohne Einschränkung $a = b = 0$ annehmen. Sei jetzt m_k der Mittelpunkt von W_k, und d die halbe Kantenlänge von W. Nach Konstruktion ist dann $W_k = \{x \colon \|x - m_k\|_\infty \le 2^{-k} d\}$. Wegen $0 = a \in W_k$ gilt $\|m_k\|_\infty \le 2^{-k} d$. Sei $A = \varphi'(0)$. Wegen $\varphi(0) = 0$ existiert dann eine in 0 stetige Funktion $r^* \colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $r^*(0) = 0$ und $\varphi(x) = Ax + r^*(x)\|x\|_\infty$ für alle $x \in U$. Definieren wir also $r \colon U \to \mathbb{R}^n$ durch $r(x) = A^{-1} r^*(x)$, so gilt auch $r(0) = 0$ und $\lim_{x \to 0} r(x) = 0$ sowie

$$\varphi(x) = A(x + r(x)\|x\|_\infty) \tag{$**$}$$

Außerdem existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$V_k := \{x + r(x)\|x\|_\infty \colon x \in W_k\} \subseteq W_{k,\varepsilon} := \{z \colon \|z - m_k\|_\infty \leq 2^{-k}d(1+\varepsilon)\} \qquad (***)$$

denn sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{x\to 0} r(x) = 0 = r(0)$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|r(x)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in W_k$. Wegen $\|x\|_\infty \leq 2 \cdot 2^{-k}d$ für $x \in W_k$ ist dann für $x \in W_k$

$$\big\|x + r(x)\|x\|_\infty - m_k\big\|_\infty \leq \|x - m_k\|_\infty + \|r(x)\|_\infty \|x\|_\infty \leq 2^{-k}d + 2^{-k}d\varepsilon = 2^{-k}d(1+\varepsilon)$$

Also ist $V_k \subseteq W_{k,\varepsilon}$ und somit $(***)$ gezeigt.

Ist aber $V_k \subseteq W_{k,\varepsilon}$, so folgt

$$\varphi(W_k) \underset{(**)}{=} A(V_k) \subseteq A(W_{k,\varepsilon})$$

und somit

$$\begin{aligned} v(\varphi(W_k)) &\leq v(A(V_k)) \leq v(A(W_{k,\varepsilon})) = |\det A| v(W_{K,\varepsilon}) = (1+\varepsilon)^n \|\det A\| v(W_k) \leq \\ &\leq (1+\varepsilon)^n c v(W_k) \end{aligned}$$

Wäre nun nicht $\alpha \leq c$, also $c < \alpha$. Wähle dann $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch $(1+\varepsilon)^n c < \alpha$. Wähle hierzu ein k wie in $(***)$. Dann gilt $v(\varphi(W_k)) < \alpha v(W_k)$, was ein Widerspruch zu $(*)$ ist. □

Definition. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von A, wenn in jeder Umgebung von x sowohl ein Punkt von A als auch ein Punkt von $X \setminus A$ liegt. Die Menge aller Randpunkte von A bezeichnen wir mit ∂A.

Satz 6. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt*

(a) ∂A ist abgeschlossen.

(b) $A \setminus \partial A$ ist offen.

(c) $A \cup \partial A$ ist abgeschlossen.

Beweis.

zu (a) Es ist $\partial A = (A \cup \partial A) \setminus (A \setminus \partial A)$, also ist $X \setminus \partial A = (X \setminus (A \cup \partial A)) \cup (A \setminus \partial A)$, was nach (b) und (c) offen ist.

zu (b) Sei $a \in A \setminus \partial A$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von a mit $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, d.h. $U \subseteq A$. Wegen U offen ist aber dann kein $x \in U$ Randpunkt von A. Also ist $U \subseteq A \setminus \partial A$.

zu (c) Sei $B = X \setminus A$. Nach Definition ist $\partial A = \partial B$, also ist nach (b) $B \setminus \partial A$ offen. Aber $X \setminus (B \setminus \partial A) = (X \setminus B) \cup \partial A = A \cup \partial A$. □

Definition. Für $A \subseteq X$ wie oben setze noch $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \partial A$ (das *Innere* von A) und $\overline{A} = A \cup \partial A$ (die *abgeschlossene Hülle* von A).

Bemerkung. A ist offen genau dann, wenn $A = \operatorname{Int}(A)$. A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$.

Lemma 7. *Sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und sei $K \subseteq U$ kompakt, deren Rand eine Nullmenge ist. Setze*

$$c = \min\{|\det \varphi'(x)|\colon x \in K\}, \quad d = \max\{|\det \varphi'(x)|\colon x \in K\}$$

Dann gilt $c \cdot v(K) \leq v(\varphi(K)) \leq d \cdot v(K)$.

Beweis. Nach Lemma 25 aus §16 exsitiert eine Folge $W_0, W_1, \dots$ von kompakten Würfeln, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, mit $\mathrm{Int}(K) = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$. Da ∂K eine Nullmenge ist, gilt dann

$$v(K) = v(\mathrm{Int}(K)) = \sum_{k=0}^{\infty} v(W_k) \tag{1}$$

Da φ ein Diffeomorphismus ist, bildet φ nach Analysis II offene Menge auf offene Mengen ab. Somit ist $\varphi(\mathrm{Int}(K)) = \mathrm{Int}\,\varphi(K)$ und daher auch $\varphi(\partial K) = \partial\varphi(K)$. Somit ist nach Korollar zu Lemma 3 $\partial\varphi(K)$ eine Nullmenge und auch $\varphi(W_i) \cap \varphi(W_j) = \varphi(W_i \cap W_j)$ sind für $i \neq j$ Nullmengen. Somit erhalten wir

$$v(\varphi(K)) = v(\mathrm{Int}\,\varphi(K)) = \sum_{k=0}^{\infty} v(\varphi(W_k)) \tag{2}$$

Nach Lemma 5 gilt aber für jedes $k \in \mathbb{N}$ $v(\varphi(W_k)) \leq d \cdot v(W_k)$. Aus (1) und (2) folgt dann

$$v(\varphi(K)) \leq d \cdot v(K)$$

Um die andere Ungleichung zu erhalten, wenden wir das schon gezeigte Resultat auf die kompakte Menge $\varphi(K)$ und den Diffeomorphismus φ^{-1} an. Setzen wir also

$$b = \max\{|\det\big((\varphi^{-1})'(\varphi(x))\big)|\colon x \in K\}$$

so gilt $v(K) \leq b \cdot v(\varphi(K))$. Für $x \in K$ ist aber $(\varphi^{-1})'(\varphi(x)) = \varphi'(x)^{-1}$ und somit $\det\big((\varphi^{-1})'(\varphi(x))\big) = (\det \varphi'(x))^{-1}$. Also ist $b = \frac{1}{c}$. Somit ist

$$c \cdot v(K) \leq v(\varphi(K))$$

□

Definition. Für eine Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei der *Träger* $\mathrm{supp}(h)$ von h (oder auch mit $\mathrm{Tr}(h)$ bezeichnet) definiert durch $\mathrm{supp}(h) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n\colon h(x) \neq 0\}}$.

Lemma 8. *Sei f integrierbar über die offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion g mit $\mathrm{supp}(g) \subseteq V$ und $\|f_V - g\|_1 < \varepsilon$.*

Beweis. Sei zuerst h eine Treppenfunktion mit $\|f_V - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $|f_V - 1_V h| \leq |f_V - h|$ gilt dann auch $\|f_V - 1_V h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun U eine beschränkte offene Menge mit $\mathrm{supp}(h) \subseteq U$, und sei $c > 0$ eine obere Schranke für $|h|$. Nach Lemma 25 aus §16 existieren dann endlich viele kompakte Quader $Q_0, \dots, Q_n \subseteq U \cap V$, so dass für $A = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k$ gilt $v(U \cap V) - v(A) < \frac{\varepsilon}{2c}$. Dann ist $g := 1_A h$ eine Treppenfunktion mit $\mathrm{supp}(g) \subseteq V$ und $\|1_V h - g\|_1 = \|1_{U\cap V} h - 1_A h\|_1 \leq c\big(v(U \cap V) - v(A)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist g wie gewünscht. □

Satz 9 (Transformationssatz). *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Weiterhin sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist die Funktion $(f \circ \varphi)|\det \varphi'(x)|$ über U integrierbar, und es gilt*

$$\int_U f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_V f(y)\,\mathrm{d}y$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zuerst für den Fall, dass f_V eine Treppenfunktion mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq V$ ist. Wegen Linearität können wir aber dann sogar annehmen, dass $f_V = 1_Q$ für einen Quader Q mit $\overline{Q} \subseteq V$. Da ∂Q eine Nullmenge ist und somit nach Korollar zu Lemma 2 $\varphi^{-1}(\partial Q)$ auch, können wir weiterhin annehmen, dass Q abgeschlossen, also kompakt ist. Da $|\det \varphi'|$ stetig und $\varphi^{-1}(Q)$ kompakt ist, ist $(1_Q \circ \varphi)|\det \varphi'|$ über $\varphi^{-1}(Q)$, also auch über U integrierbar. Somit ist nur noch zu zeigen, dass

$$\int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det \varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_Q 1\,\mathrm{d}y = v(Q)$$

Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $|\det \psi'|^{-1}$ auf der kompakten Menge Q gleichmäßig stetig ist, gibt es eine "Zerlegung" $Q = Q_0 \cup \ldots\ Q_m$ in kompakte Quader, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, so dass gilt

$$\max\{|\det \psi'(y)|^{-1} \colon y \in Q_i\} - \min\{|\det \psi'(y)|^{-1} \colon y \in Q_i\} \leq \varepsilon, \text{ für } i \leq m$$

Setze nun $K_i = \psi(Q_i)$, $c_i = \min\{|\det \varphi'(x)| \colon x \in K_i\}$ und $d_i = \max\{|\det \varphi'(x)| \colon x \in K_i\}$. Wegen $\varphi'\big(\psi(x)\big) = \psi'(x)^{-1}$ gilt dann $d_i - c_i \leq \varepsilon$ für $i \leq m$. Nach Lemma 7 gilt $c_i \cdot v(K_i) \leq v(Q_i) \leq d_i \cdot v(K_i)$. Natürlich gilt auch

$$c_i \cdot v(K_i) \leq \int_{K_i} |\det \varphi'(x)|\,\mathrm{d}x \leq d_i \cdot v(K_i)$$

Also folgt

$$\left|\int_{K_i} |\det \varphi'(x)|\,\mathrm{d}x - v(Q_i)\right| \leq (d_i - c_i)v(K_i) \leq \varepsilon \cdot v(K_i)$$

Da $K_i \cap K_j = \psi(Q_i \cap Q_j)$ für $i \neq j$ nach Korollar zu Lemma 2 eine Nullmenge ist, erhält man nach Summation

$$\left|\int_{\psi(Q)} |\det \varphi'(x)|\,\mathrm{d}x - v(Q)\right| \leq \varepsilon \cdot v\big(\psi(Q)\big) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Also folgt die Behauptung.

Sei nun f eine beliebige integrierbare Funktion. Nach Lemma 8 gibt es dann eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktion mit $\lim_{k\to\infty} \|f_V - g_k\|_1 = 0$ und $\operatorname{supp}(g_k) \subseteq V$. Wegen Satz 1 aus §17 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq V$ punktweise gegen f_V konvergiert. Setze nun $\tilde{g}_k = (g_k \circ \varphi)|\det \varphi'|$ und $\tilde{f} = (f_V \circ \varphi)|\det \varphi'|$. Nach dem oben gezeigten ist $\tilde{g}_k$ über U integrierbar und wenn wir das oben Gezeigte auf die Treppenfunktion $|g_k - g_m|$ anwenden, erhalten wir

$$\|\tilde{g}_k - \tilde{g}_m\|_1 = \int_U |\tilde{g}_k - \tilde{g}_m|\,\mathrm{d}x = \int_V |g_k - g_m|\,\mathrm{d}y = \|g_k - g_m\|_1$$

Somit ist $(\tilde{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge. Weiterhin konvergiert $(\tilde{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ außerhalb der Nullmenge $\varphi^{-1}(A)$ punktweise gegen $\tilde{f}$. Somit ist nach Satz 1 aus §17 $\tilde{f}$ integrierbar und es gilt

$$\int_U \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_U \tilde{g}_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_V g_k(y)\,\mathrm{d}y = \int_V f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \square$$

Bemerkung. Wenn man den Transformationssatz auf φ^{-1} anwendet, erhält man umgekehrt aus der Integrierbarkeit von $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ auch die Integrierbarkeit von f.

Beispiel (Polarkoordinaten)**.** Sei $r>0$ und setze $K=\{x\in\mathbb{R}^2\colon \|x\|\le r\}$. Wir wollen $v(K)$ berechnen. Setze hierfür $U=(0,r)\times(0,2\pi)$. U ist offen. Definiere $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^2$ durch $\varphi(s,t)=(s\cos t, s\sin t)$. Sei $V=\varphi(U)$. Es ist $V\subseteq K$ und $K\setminus V=\{x\in\mathbb{R}\colon \|x\|=r\}\cup\{(s,0)\colon 0\le s\le r\}$. Also (!) ist $K\setminus V$ eine Nullmenge und daher $v(K)=v(V)$. φ ist injektiv. Um zu zeigen, dass $\varphi\colon U\to V$ ein Diffeomorphismus ist, berechnen wir $\det\varphi'(s,t)$. Es ist

$$\det\varphi'(s,t)=\det\begin{pmatrix}\cos t & -s\sin t\\ \sin t & s\cos t\end{pmatrix} = s\cos^2 t + s\sin^2 t = s>0, \quad \text{für } (s,t)\in U.$$

Somit ist φ ein Diffeomorphismus und nach dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini gilt

$$v(V)=\int_V 1\,\mathrm{d}y=\int_U s\,\mathrm{d}(s,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^r s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}t=\pi r^2$$

19 1-Formen, Kurvenintegrale

Frage. Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $g\colon U\to\mathbb{R}^n$ stetig. Gibt es dann eine differenzierbare Funktion $f\colon U\to\mathbb{R}$ mit $g=f'$?

Definition. Eine Funktion $g\colon U\to\mathbb{R}^n$ mit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ bezeichnet man auch als *Vektorfeld* auf U.

Bemerkung. Für $n=2$ kann man solch ein g wie in Abbildung 1 gut veranschaulichen.

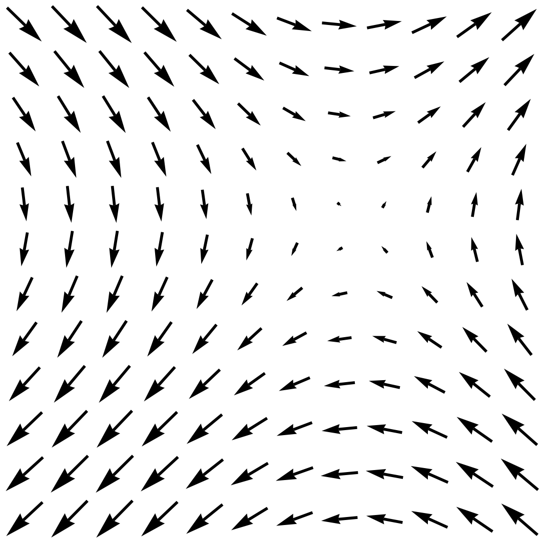
Statt mit Vektorfelder arbeiten wir im folgenden jedoch mit einer äquivalenten Darstellung. Wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit dem Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$. $(\mathbb{R}^n)^*$ besteht aus den linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}^n)^*$ ist kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Definition. Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Eine *1-Form* auf U ist eine Abbildung $\omega\colon U\to(\mathbb{R}^n)^*$. Ist also $f\colon U\to\mathbb{R}$ differenzierbar, so "ist" $f'\colon U\to(\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form. Bei dieser Auffassung schreiben wir $\mathrm{d}f$ für f'.

Notation. Sei n fest. Für $1\le i\le n$ definiere die i-te Projektion $\lambda_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ durch $\lambda_i(x_1,\dots,x_n)=x_i$. Dann ist $\lambda_i,\dots,\lambda_n$ die kanonische Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$. λ_i ist differenzierbar, und es gilt $\mathrm{d}\lambda_i(x)=\lambda_i$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$. Wir benutzen nun die Notation

$$\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}\lambda_i$$

Abbildung 1: Vektorfeld im 2-dimensionalen



Ist $\omega\colon U \to (\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form, so existieren eindeutig Funktionen $f_1, \dots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\lambda_i$$

Wir schreiben dies etwas ungenau als

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_i$$

Bemerkung. Wir können ω mit dem Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ identifizieren.

Beispiel. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $b = f'(x)$. Dann gilt für alle $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$by = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)y_n, \text{ d.h. } \mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\lambda_i$$

Somit ist

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

Bemerkung. Beachte, dass $(\mathbb{R}^n)^*$ mit der durch die Abbildungsnorm induzierten Metrik eine metrischer Raum ist. Also ist klar, was es bedeutet, dass eine 1-Form stetig ist.

Definition. Sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_i$ eine 1-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. ω ist *(stetig) differenzierbar*, wenn $f_1, \dots, f_n$ alle (stetig) differenzierbar sind.

Bemerkung. Ist ω differenzierbar, so ist ω stetig.

Notation. Ist $v \in (\mathbb{R}^n)^*$ und $w \in \mathbb{R}^n$, so sei $vw = v(w)$.

Definition. Sei ω eine 1-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Dann ist f eine *Stammfunktion* von ω, wenn f differenzierbar ist und $\omega = \mathrm{d}f$ gilt.

Bemerkung. Nach Analysis II gilt: Ist U zusammenhängend und sind f und g Stammfunktionen von ω, so ist $f - g$ konstant.

In der Analysis I erhalten wir Stammfunktionen von stetigen Funktionen durch Integration. Dies wird auch hier, wenn sie existieren, der Fall sein. Wir benötigen aber Integrale längs Kurven.

Notation. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$. Dann bezeichne $f|A$ die Einschränkung von f auf A.

Definition. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. γ ist *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ von $[a,b]$ gibt, so dass $\gamma|[a_i, a_{i+1}]$ für alle $0 \leq i < k$ stetig differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so nennen wir γ eine *Integrationskurve.*

Definition. Sei nun ω eine stetig 1-Form auf U und $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine Integrationskurve. Wir definieren das Integral $\int_\gamma \omega$ von ω längs γ wie folgt: Sei $a = a_0 < \cdots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass $\gamma|[a_i, a_{i+1}]$ für alle $i < k$ stetig differenzierbar ist. Definiere dann

$$\gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{cases} \gamma'(t) & \text{falls } t \notin \{a_0, \ldots, a_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und setze

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ist also $\omega = \sum_{i=1}^n f_i \,\mathrm{d}x_i$ und $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, so gilt

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung des üblichen eindimensionalen Integrals, denn ist $\omega = f\,\mathrm{d}x$ eine stetige 1-Form auf (a,b) und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Identität, so ist

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Bemerkung. Es gilt

$$\int_\gamma c_1\omega_1 + c_2\omega_2 = c_1 \int_\gamma \omega_1 + c_2 \int_\gamma \omega_2$$

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a,c] \to U$, $a \leq b \leq c$, $\beta = \gamma|[a,b]$ und $\delta|[b,c]$, so gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega + \int_\delta \omega$$

Für γ, β und δ wie oben, schreibe auch $\gamma = \beta \oplus \delta$.

Bemerkung. Ist $\gamma\colon [a,b] \to U$ und $\gamma^-\colon [a,b] \to U$ definiert durch $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$, so ist

$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Satz 1. *Sei f eine Stammfunktion der stetigen 1-Form $\omega\colon U \to (\mathbb{R}^n)^*$. Dann gilt für jede Integrationskurve $\gamma\colon [a,b] \to U$*

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass γ stetig differenzierbar ist. Dann ist $f \circ \gamma$ differenzierbar und nach der Kettenregel gilt $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ für $t \in [a,b]$. Somit ist nach dem Hauptsatz

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathrm{d}f = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \qquad \square$$

Beispiel. Hiermit können wir schon zeigen, dass gewisse stetige 1-Formen keine Stammfunktion besitzen. Sei $\omega = y^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t,t)$ und $\delta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t,t^2)$. Dann ist $\gamma(0) = \delta(0)$ und $\gamma(1) = \delta(1)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\\ \int_\delta \omega &= \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Also hat nach Satz 1 ω keine Stammfunktion.

Definition. Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Satz 2. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und sei ω eine stetige 1-Form aus U. Dann sind äquivalent:*

(1) ω besitzt eine Stammfunktion.

(2) Für jede geschlossene Integrationskurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ gilt

$$\int_\gamma \omega = 0$$

(3) Für je zwei Integrationskurven $\gamma\colon [a,b] \to U$ und $\delta\colon [c,d] \to U$ mit $\gamma(a) = \delta(c)$ und $\gamma(b) = \delta(d)$ gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$$

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Satz 1.

(2) ⇒ (3) Seien γ, δ wie in (3). Setze $e = b + d - c$. Definiere $\beta\colon [a, e] \to U$ durch

$$\beta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } a \le t \le b \\ \delta(d + b - t) & \text{falls } b \le t \le e \end{cases}$$

Dann ist β geschlossen. Also ist

$$0 = \int_\beta \omega = \int_\gamma \omega - \int_\delta \omega$$

(3) ⇒ (1) Sei ohne Einschränkung $U \neq \emptyset$. Wähle einen festen Punkt $a \in U$. Nach Analysis II existiert für jedes $x \in U$ ein Streckenzug S von a nach x mit $S \subseteq U$. Somit existiert für jedes $x \in U$ eine Integrationskurve $\gamma_x\colon [c_x, d_x] \to U$ mit $\gamma_x(c_x) = a$ und $\gamma(d_x) = x$. Definiere nun $F\colon U \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

Nach (3) hängt diese Definition nicht von der speziellen Wahl von γ_x ab. Wir können also schreiben:

$$F(x) = \int_a^x \omega$$

Wir zeigen, dass F eine Stammfunktion ist. Sie hierzu $\omega = \sum_{i=1}^n f_i \,\mathrm{d}x_i$. Es genügt zu zeigen, dass F partiell differenzierbar ist und $D_i F = f_i$ für $1 \le i \le n$. Seien hierzu $1 \le i \le n$ und $x \in U$. Für genügend $h \neq 0$ gilt dann

$$F(x + he_i) = \int_a^x \omega + \int_x^{x+he_i} \omega$$

und somit

$$F(x + he_i) - F(x) = \int_x^{x+he_i} \omega$$

Letzteres Integral berechnen wir mit der Kurve $\delta_h\colon [0, 1] \to U$, die definiert ist durch $\delta_h(t) = x + the_i$. Wegen $\delta_h'(t) = he_i$ ist $\omega(\delta_h(t))\delta_h'(t) = hf_i(\delta_h(t))$, also

$$\int_{\delta_h} \omega = h \int_0^1 f_i(x + the_i) \,\mathrm{d}t$$

Somit ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f_i(x + the_i) \,\mathrm{d}t = f_i(x) \qquad \square$$

Beispiel. Sei $\omega = (2x - y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$. Wähle $(0, 0)$ als Startpunkt. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiere die Kurve $\gamma_{(x,y)}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$ nach (x, y) durch $\gamma_{(x,y)}(t) = t(x, y)$. Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega = \int_0^1 (2tx - ty)x - txy \,\mathrm{d}t = x^2 - xy$$

Man überzeugt sich leicht von $\mathrm{d}f = \omega$.

Definition. Sei $\omega = \sum_{i=1}^n f_i \, dx_i$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf U. ω ist *geschlossen*, wenn

$$D_i f_j = D_j f_i \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n$$

Bemerkung. Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Besitzt ω eine Stammfunktion, so ist ω geschlossen.

Beweis. Sei $g\colon U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω. Dann ist g zweimal stetig differenzierbar. Also gilt nach Analysis II für $1 \leq i, j \leq n$

$$D_i f_j = D_i D_j g = D_j D_i g = D_j f_i \qquad \square$$

Mit dieser Bemerkung kann man schon für viele 1-Formen leicht feststellen, dass sie keine Stammfunktion besitzen. Betrachten wir etwa unser früheres Beispiel $\omega = y^2 \, dx + dy$. Hier ist $\frac{\partial}{\partial y} y^2 = 2y$ aber $\frac{\partial}{\partial x} 1 = 0$. Für beliebige offene U gilt *nicht*, dass jede geschlossene 1-Form auf U eine Stammfunktion besitzt. Für ein Beispiel siehe Übungen. Aber für viele U ist dies richtig.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. U heißt *sternförmig*, wenn es ein $a \in U$ gibt mit $[a, x] \subseteq U$ für alle $x \in U$.

Satz 3 (Poincarésches Lemma)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann besitzt jede geschlossene 1-Form auf U eine Stammfunktion.*

Beweis. Sei $a \in U$ mit $[a, x] \subseteq U$ für alle $x \in U$. Nach Translation können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a = 0$. Sei $\omega = \sum_{i=1}^n f_i \, dx_i$ eine geschlossene 1-Form auf U. Für $x \in U$ sei $\gamma_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma_x(t) = tx$. γ_x ist also eine Parametrisierung von $[0, x]$. Definiere nun $f\colon U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i \, dt$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Wir zeigen, dass f eine Stammfunktion von ω ist. Nach Analysis II ist f differenzierbar und für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}
D_k f(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i \right) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(tx) x_i t + f_k(tx) \, dt = \\
&= \int_0^1 t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(tx) x_i + f_k(tx) \, dt = \int_0^1 t \left(\frac{d}{dt} f_k \right)(tx) + f_k(tx) \, dt = \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t f_k(tx)) \, dt = f_k(x) \qquad \square
\end{aligned}$$

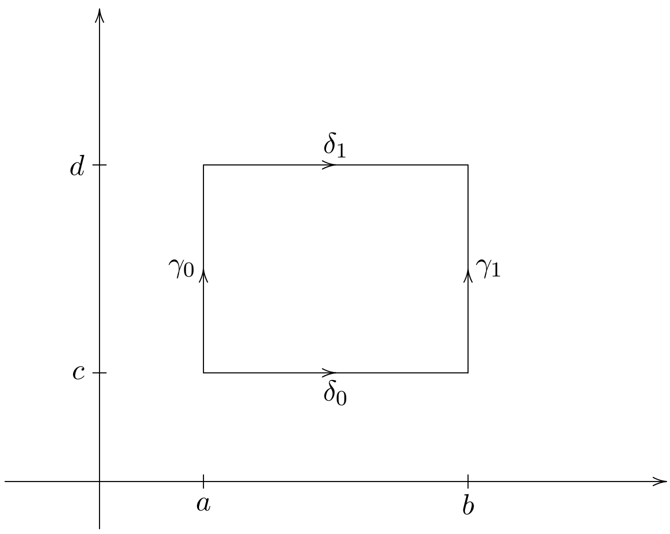
Korollar. *Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf U. Dann ist ω genau dann geschlossen, wenn es für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt, so dass $\omega|V$ eine Stammfunktion besitzt.*

Beweis. Ist die rechte Seite erfüllt, so folgt genau wie in der obigen Bemerkung, dass ω geschlossen ist. Sei andererseits ω geschlossen und $x \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. $U_\varepsilon(x)$ ist sternförmig. Also besitzt $\omega|U_\varepsilon(x)$ eine Stammfunktion. $\square$

20 Differentialformen, Satz von Stokes

Der Satz von Stokes ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Satz 1 aus §19 ist ein Spezialfall hiervon. Zur Motivation beweisen wir zuerst noch einen weiteren Spezialfall. Sei hierzu $Q = [a,b] \times [c,d]$ ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^2$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $Q \subseteq U$. Wir parametrisieren den "orientierten" Rand von Q durch die folgenden vier Kurven γ_0, γ_1, δ_0, δ_1, die definiert werden durch

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &\colon [c,d] \to U, t \mapsto (a,t) \\
\gamma_1 &\colon [c,d] \to U, t \mapsto (b,t) \\
\delta_0 &\colon [a,b] \to U, t \mapsto (t,c) \\
\delta_1 &\colon [a,b] \to U, t \mapsto (t,d)
\end{aligned}$$



Längs dieser Kurven können wir eine 1-Form auf U integrieren. Sei also $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf U. Wir setzen

$$\int_{\partial Q} \omega := -\int_{\gamma_0} \omega + \int_{\delta_0} \omega + \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\delta_1} \omega$$

Wir integrieren also ω längs des Randes von Q im Gegenuhrzeigersinn. Nun wollen wir $\int_{\partial Q} \omega$ berechnen als Integral einer "Ableitung" $\mathrm{d}\omega$ von ω über Q. Es stellt sich heraus, dass wir hierzu $\mathrm{d}\omega$ definieren müssen durch

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

Wir wollen also hiermit zeigen, dass

$$\int_Q \mathrm{d}\omega = \int_{\partial Q} \omega$$

Mit Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}\int_Q \mathrm{d}\omega &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_c^d g(b,y) - g(a,y) \,\mathrm{d}y - \int_a^b f(x,d) - f(x,c) \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Nun ist aber wegen $\gamma_i'(t) = (0,1)$ und $\delta_i'(t) = (1,0)$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_c^d g(b,y) \,\mathrm{d}y, \quad \int_{\gamma_0} \omega = \int_c^d g(a,y) \,\mathrm{d}y$$

und

$$\int_{\delta_1} \omega = \int_a^b f(x,d) \,\mathrm{d}x, \quad \int_{\delta_0} \omega = \int_a^b f(x,c) \,\mathrm{d}x$$

Somit haben wir

$$\int_Q \mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\delta_1} \omega + \int_{\delta_0} \omega = \int_{\partial Q} \omega$$

Wir wollen dies nun auf höhere Dimensionen verallgemeinern, und zwar gleich so, dass der Satz 1 aus §19, welcher kurz beschrieben sagt, dass

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

auch ein Spezialfall wird. Der Beweis wird nicht wesentlich komplizierter als im obigen Spezialfall. Für die Formulierung benötigen wir jedoch einen relativ komplizierten Apparat. Dabei starten wir mit Begriffen aus der multilinearen Algebra. Seien im Folgenden V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Definition. Sei $k \geq 1$ und $f\colon V^k \to W$.

(a) f ist *k-linear*, wenn für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v, v', \dots, v_k \in V$ gilt:

$$f(v_1, \dots, \lambda v + \mu v', \dots, v_k) = \lambda f(v_1, \dots, v, \dots, v_k) + \mu f(v_1, \dots, v', \dots, v_k)$$

(b) f ist *alternierend*, wenn $f(v_1, \dots, v_k) = 0$ gilt, falls $v_i = v_j$ für ein Paar (i,j) mit $1 \leq i < j \leq k$ gilt.

Bemerkung. Sei $f\colon V^k \to W$ k-linear und alternierend. Wie in der linearen Algebra zeigt man: Ist $\pi \in S_k$, so ist $f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}(\pi) f(v_1, \dots, v_k)$.

Definition. Eine *alternierende k-Form* ω auf V ist eine k-lineare, alternierende Abbildung $\omega\colon V^k \to \mathbb{R}$.

Bemerkung. Ist $\dim(V) = n$, so ist det eine alternierende n-Form auf V.

Definition. Für $k \geq 1$ setze

$$\mathrm{Alt}^k(V) = \{\omega \colon V^k \to \mathbb{R} \colon \omega \text{ ist eine alternierende } k\text{-Form auf } V\}$$

Setze noch $\mathrm{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$. Im folgenden ist es günstig, $V^0 = \{0\}$ zu setzen, und $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Abb}(V^0, \mathbb{R})$ zu indentifizieren. $\mathrm{Alt}^k(V)$ ist mit der offensichtlichen Definition ein Vektorräum über $\mathbb{R}$. Es ist also $\mathrm{Alt}^1(V) = V^*$ der Dualraum von V. Für $\omega \in V^*$ und $v \in V$ setze

$$\omega \cdot v = \langle \omega, v \rangle := \omega(v)$$

Definition. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$. Dann wird die Abbildung

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \colon V^k \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Aus den Eigenschaften von det und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt sofot, dass $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ eine alternierende k-Form auf V ist.

Bemerkung. Die Abbildung $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \mapsto \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ von $(V^*)^k$ nach $\mathrm{Alt}^k(V)$ ist k-linear und alternierend.

Satz 1. *Sei $k \geq 1$ und sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von V^*. Dann bilden die Elemente $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ eine Basis von $\mathrm{Alt}^k(V)$. Insbesondere gilt*

$$\dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

Beweis. Sei $b_1, \dots, b_n \in V$ eine zu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ duale Basis, d.h. $\langle \varphi_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$. Nach Definition ist dann für $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$.

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0 & \text{falls } (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k) \end{cases}$$

Sei also nun $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ und setze $\lambda_{i_1, \dots, i_k} = \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k})$ für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Dann gilt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$$

und offenbar ist diese Darstellung eindeutig. □

Satz 2. *Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$. Weiterhin seien $\psi_1, \dots, \psi_k \in V^*$ mit $\psi_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \varphi_j$ für $1 \leq i \leq k$. Setze $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$. Dann gilt $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \det A \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k &= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1j_1} \dots a_{kj_k} \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_k} = \\ &= \sum_{\pi \in S_k} a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)} \varphi_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge \varphi_{\pi(k)} = \\ &= \sum_{pi \in S_k} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)} \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \\ &= \det A \cdot \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k\end{aligned}$$

□

Sei nun V endlichdimensional.

Satz 3. *Sind $k, l \geq 1$, so existiert genau eine Abbildung*

$$\wedge\colon \operatorname{Alt}^k(V) \times \operatorname{Alt}^l(V) \to \operatorname{Alt}^{k+l}(V), (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

mit den Eigenschaften

(1) $\wedge$ ist bilinear, d.h. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$, $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$ und $\lambda(\omega \wedge \eta) = \lambda\omega \wedge \eta = \omega \wedge \lambda\eta$.

(2) Sind $\omega_1, \dots, \omega_k, \eta_1, \dots \eta_l \in V^*$, so gilt

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) \wedge (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l) = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l$$

Beweis. Sei zuerst $\varphi_1, \dots \varphi_n$ eine Basis von V^*. Seien $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$ und $\eta \in \operatorname{Alt}^l(V)$. Nach Satz 1 kann man ω und η eindeutig darstellen in der Form

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k} \\ \eta &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq n} a_{j_1,\dots,j_l} \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_l}\end{aligned}$$

Definiere nun

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq n}} a_{i_1,\dots,i_k} b_{j_1,\dots,j_l} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_l}$$

Offenbar gelten dann (1) und (2). Die Eindeutigkeit ist klar. □

Definition. Für $a \in \mathbb{R} = \operatorname{Alt}^0(V)$ und $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$ setze

$$a \wedge \omega = \omega \wedge a := a\omega$$

Bemerkung. Für $\omega_1 \in \operatorname{Alt}^k(V)$, $\omega_2 \in \operatorname{Alt}^l(V)$ und $\omega_3 \in \operatorname{Alt}^m(V)$ gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

Bemerkung. Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ und $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$ gilt

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

Beweis. Es genügt dies für den Fall $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ und $\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l$ mit $\omega_i, \eta_j \in V^*$ zu zeigen. Dann gilt es aber, da die Permutation

$$(1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l) \mapsto (k+1, \ldots, k+l, 1, \ldots, k)$$

das Signum $(-1)^{kl}$ hat. □

Definition. Seien wieder V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Weiterhin sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Für ein $\omega \in \mathrm{Alt}^k(W)$ definiere eine Abbildung $T^*(\omega) = T^*\omega$ von V^k nach $\mathbb{R}$ durch

$$T^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(T(v_1), \ldots, T(v_k))$$

Offenbar ist $T^*\omega$ eine alternierende k-Form auf V, die mit T auf V zurückgeholte Form. Es gilt also

$$T^*\colon\ \mathrm{Alt}^k(W) \to \mathrm{Alt}^k(V)$$

Beispiel. Ist $\omega \in \mathrm{Alt}^0(V)$, so ist $T^*\omega = \omega$.

Beispiel. Ist $\omega \in \mathrm{Alt}^1(V)$, so ist $T^*\omega = \omega \circ T$.

Satz 4. *Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $T\colon V \to W$ linear. Dann gilt:*

(a) $T^*\colon\ \mathrm{Alt}^k(W) \to \mathrm{Alt}^k(V)$ ist linear.

(b) Sind ω und η alternierende Formen auf W, so gilt $T^*(\omega \wedge \eta) = T^*(\omega) \wedge T^*(\eta)$.

(c) Ist $V = W$, $\dim(V) = n$ und ω eine alternierende n-Form, so ist $T^*\omega = \det(T) \cdot \omega$.

(d) Ist Z ein weiterer Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $S\colon W \to Z$ linear, so ist $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Beweis.

(a) Klar.

(b) Wegen (a) genügt es zu zeigen, dass für $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in W^*$ gilt:

$$T^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) = T^*(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge T^*(\varphi_k)$$

Seien hierzu $v_1, \ldots, v_k \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) &= (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(Tv_1, \ldots, Tv_k) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, Tv_1 \rangle & \ldots & \langle \varphi_1, Tv_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k, Tv_1 \rangle & \ldots & \langle \varphi_k, Tv_k \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_1 \circ T, v_1 \rangle & \ldots & \langle \varphi_1 \circ T, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k \circ T, v_1 \rangle & \ldots & \langle \varphi_k \circ T, v_k \rangle \end{pmatrix} = \\ &= (T^*(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge T^*(\varphi_k))(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

(c) Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Sei $T(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$ und setze $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Nach Definition ist dann $\det T = \det A$. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die zu $b_1, \ldots, b_n$ duale Basis. Nach Satz 1 hat ω die Form $c \cdot \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. Sei ohne Einschränkung $c = 1$. Nach (b) ist $T^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = T^*(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge T^*(\varphi_n)$. Aber $T^*(\varphi_j) = \varphi_j \circ T \overset{!}{=} \sum_{i=1}^n a_{ji} \varphi_i$. Somit ist nach Satz 2 $T^*(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge T^*(\varphi_n) = \det A^T \cdot \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n = \det T \cdot \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$.

(d) Klar nach Definition. □

Im Folgenden betrachten wir dies für $V = \mathbb{R}^n$. Dann hat V^* die kanonische Basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, wobei $\lambda_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die i-te Projektion ist, d.h. $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Nach Satz 1 bilden die Elemente $\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq n$, eine Basis von $\mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ für $k \geq 1$.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Differentialform der Ordnung k* (oder kurz *k-Form*) auf U ist eine Abbildung $\omega \colon U \to \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$. Eine 0-Form ist also einfach eine Abbildung $f \colon U \to \mathbb{R}$. Für $k = 1$ stimmt diese Definition mit der früheren überein. Seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ k-Formen auf U und $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definiere dann die k-Formen $f\omega$ und $\omega_1 + \omega_2$ durch $(f\omega)(x) = f(x)\omega(x)$ und $(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$. Ist weiterhin η eine l-Form auf U, so können wir die $(k+l)$-Form $\omega \wedge \eta$ definieren durch $(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$. Die obigen Rechenregeln übertragen sich auf diese Operationen.

Bemerkung. Sei nun $k \geq 1$ und ω eine k-Form auf U. Dann besitzt ω eine kanonische Darstellung, die sich wie folgt ergibt: Da die Elemente $\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, eine Basis von $\mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ bilden, gibt es eindeutig bestimme Funktionen $f_{i_1, \ldots, i_k} \colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1, \ldots, i_k}(x) \cdot \lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1, \ldots, i_k}(x) \cdot \mathrm{d}\lambda_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\lambda_{i_k}(x) \end{aligned}$$

Mit unserer früheren Konvention $\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\lambda_i$ gilt also

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1, \ldots, i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

Wir nennen dies die *Normaldarstellung* von ω.

Definition. Ist ω wie oben, so heißt ω *beliebig oft differenzierbar*, wenn jedes $f_{i_1, \ldots, i_k}$ beliebig oft differenzierbar ist. Im Folgenden setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass jede k-Form beliebig oft differenzierbar ist.

Bemerkung. Das ist unproblematisch, denn sind ω, η beliebig oft differenzierbar, so auch $\omega \wedge \eta$.

Definition. Für offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ setze

$$\Omega^k(U) = \{\omega \colon U \to \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n) \colon \omega \text{ ist } k\text{-Form auf } U\}$$

Definition. Wir definieren nun für jede k-Form ω auf U ihre *(äußere) Ableitung* $\mathrm{d}\omega$:

(1) Ist ω eine 0-Form, so sei $\mathrm{d}\omega$ die übliche Ableitung von ω.

(2) Sei ω eine k-Form mit $k \geq 1$ und sei

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} f_{i_1,\dots,i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

die Normaldarstellung von ω. Setze dann

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} \mathrm{d}f_{i_1,\dots,i_k}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

Somit gilt also für ω wie in (2)

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}$$

Es ist also $\mathrm{d}\colon \Omega^k(U)\to\Omega^{k+1}(U)$.

Beispiel. Sei $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y =\\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Analog erhält man für $\omega = \sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$, dass

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$$

Satz 5. *Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:*

(a) Sind ω_1 und ω_2 k-Formen auf U und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, so gilt

$$\mathrm{d}(\lambda\omega_1+\mu\omega_2) = \lambda\,\mathrm{d}\omega_1 + \mu\,\mathrm{d}\omega_2$$

(b) Ist ω eine k-Form auf U und η eine l-Form auf U, so gilt

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$$

(c) Ist ω eine k-Form auf U, so gilt

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$$

Beweis.

(a) Klar.

(b) Sei zuerst $k = l = 0$. Dann ist (b) einfach die Produktregel. Seien nun $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig und sei

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\dots,i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

und

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq n} g_{j_1,\dots,j_l} \, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$$

Wir schreiben hierfür kurz $\omega = \sum_I f_I \, \mathrm{d}x_I$ und $\eta = \sum_J f_J \, \mathrm{d}x_J$. Dann ist $\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} f_I g_J \, \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J$, also

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} \mathrm{d}(f_I g_J) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = \sum_{I,J} (g_J \, \mathrm{d}f_I + f_I \, \mathrm{d}g_J) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = \\ &= \sum_{I,J} g_J \, \mathrm{d}f_I \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J + (-1)^k f_I \, \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}g_J \wedge \mathrm{d}x_J = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \, \mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

(c) Wegen (a) genügt es den Fall zu betrachten, dass $\omega = f \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$. Hierfür gilt aber

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) = \\ &= \mathrm{d}\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}1 \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = \\ &= \mathrm{d}\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \end{aligned}$$

Somit genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{d}\mathrm{d}f = 0$ für eine 0-Form f. Wegen $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ ist aber nach obigem Beispiel:

$$\mathrm{d}\mathrm{d}f = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0 \qquad \square$$

Definition. Wir übertragen nun das "Zurückholen" von k-Formen auf Differentialformen. Seien hierzu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sowie $\varphi \colon U \to V$ eine beliebig oft differenzierbare Abbildung. Für jedes $x \in U$ ist dann $D\varphi(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und wir können mit $D\varphi(x)$ jede alternierende Form auf $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ zurückholen. Sei also ω eine k-Form auf V. Wir definieren dann eine k-Form $\varphi^*(\omega) = \varphi^*\omega$ auf U durch

$$(\varphi^*\omega)(x) = \big(D\varphi(x)\big)^* \omega\big(\varphi(x)\big)$$

Es gilt also für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$:

$$(\varphi^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega\big(\varphi(x)\big)\big(D\varphi(x)v_1, \dots, D\varphi(x)v_k\big)$$

Bemerkung. Es ist $\varphi^* \colon \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$, denn $\varphi^*\omega$ ist beliebig oft differenzierbar. Dies folgt leicht aus den Berechnungen weiter unten.

Bemerkung. Für $k = 0$, d.h. ist f eine 0-Form, gilt $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

Satz 6. *Seien $u \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sowie $\varphi\colon U \to V$ beliebig oft differenzierbar. Dann gilt:*

(a) φ^* ist linear.

(b) Sind ω und η Differentialformen auf V, so gilt $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$.

(c) Ist $m = n$ und ω eine n-Form auf V, so gilt

$$\varphi^*\omega = \det D\varphi \cdot (\omega \circ \varphi)$$

(d) Ist $W \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\psi\colon V \to W$ beliebig oft differenzierbar, so ist

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

Beweis. (a), (b) und (c) folgen folgen sofot aus Satz 4. (d) folgt aus Satz 4 und der Kettenregel

$$D(\psi \circ \varphi)(x) = D\psi\big(\varphi(x)\big) \cdot D\varphi(x) \qquad \square$$

Bemerkung. Sei $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f_{i_1,\ldots,i_k}\, \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}$ eine k-Form auf V. Für $1 \le i \le m$ ist nach Definition

$$(\varphi^*\mathrm{d}y_i)(x)(v) = \mathrm{d}y_i(\varphi(x))(D\varphi(x)v) = \mathrm{d}\varphi_i(x)(v)$$

wobei $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Also gilt $\varphi^*\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}\varphi_i$. Weiterhin ist $\varphi^* f = f \circ \varphi$ für eine 0-Form f auf W. Somit gilt für ω wie oben nach Satz 6

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (f_{i_1,\ldots,i_k} \circ \varphi)\, \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

Hieraus sieht man sofort, dass $\varphi^*\omega$ unendlich oft differenzierbar ist. Speziell gilt für $k = 1 = n$

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{m} (f_i \circ \varphi)\varphi_i'$$

also $\varphi^*\omega(t) = \omega(\varphi(t))\varphi'(t)$. In diesem Fall ist also $\varphi^*\omega$ schon in der Definition des Kurvenintegrals aufgetaucht.

Sehr wichtig ist die folgende Vertauschbarkeit der Ableitung mit dem Zurückholen von Differentialformen.

Satz 7. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sowie $\varphi\colon U \to V$ beliebig oft differenzierbar. Dann gilt für jede Differentialform ω auf V*

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\omega)$$

Beweis. Wegen Linearität können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\omega = f\,\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}$. Sei wieder $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Wie oben gezeigt ist $\varphi^*\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}\varphi_i$. Weiterhin ist

$$\varphi^*(\mathrm{d}f) = \varphi^*\Big(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i\Big) = \sum_{i=1}^m \Big(\frac{\partial f}{\partial y_i} \circ \varphi\Big)\mathrm{d}\varphi_i = \mathrm{d}(f \circ \varphi)$$

Also gilt wegen $\mathrm{d}^2 = 0$

$$\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \mathrm{d}\big((f \circ \varphi)\,\mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k}\big) = \mathrm{d}(f \circ \varphi) \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

und

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}) = \mathrm{d}(f \circ \varphi) \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k} \qquad \square$$

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Kurve:

Definition. Eine *k-Fläche* im $\mathbb{R}^n$ ist ein Paar (γ, Q) mit $\gamma\colon U \to V$ unendlich oft differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einem kompakten nichtentarteten Quader $Q \subseteq U$. Wir schreiben dies etwas ungenau als $\gamma\colon Q \to V$ ist eine k-Fläche.

Beispiel. Sei $Q = [0,1] \times [0, 2\pi]$ und $\gamma\colon Q \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist γ eine 2-Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Definition. Wir wollen nun k-Formen im $\mathbb{R}^n$ über k-Flächen im $\mathbb{R}^n$ integrieren. Hierzu gehen wir wie folgt vor: Sei zuerst ω eine k-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^k$, und sei $Q \subseteq U$ ein kompakter nichtentarteter Quader. Dann ist $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$ mit $f\colon U \to \mathbb{R}$. Setze

$$\int_Q \omega := \int_Q f\,\mathrm{d}x$$

Sei nun ω eine k-Form auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\gamma\colon Q \to V$ eine k-Fläche. Setze dann

$$\int_\gamma \omega := \int_Q \gamma^*\omega$$

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung des Kurvenintegrals, denn sei $\gamma\colon [a,b] \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen eine Kurve. Weiterhin sei ω eine 1-Form auf V. Sei also $\omega = \sum_{i=1}^n f\,\mathrm{d}x_i$. Dann gilt

$$\gamma^*\omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \gamma)\gamma'$$

Also ist nach unserer neuen Definition:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

was mit unserer alten Definition übereinstimmt.

Bemerkung. Ein weiterer Spezialfall ist der folgende: Sei $\gamma\colon Q \to V$ eine k-Fläche mit $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Weiterhin sei ω eine k-Form auf V. Nach Satz 6(c) ist $\gamma^*\omega = \det D\gamma \cdot (\omega \circ \gamma)$. Sei $\omega = f \,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$. Nach Definition ist dann

$$\int_\gamma \omega = \int_Q f(\gamma(x)) \cdot \det D\gamma(x) \,\mathrm{d}x$$

Sei nun sogar $\gamma\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Setze $U_1 = \mathrm{Int}(Q)$ und $V_1 = \gamma(U_1)$. Dann ist auch $\gamma|U_1\colon U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus. Also gilt nach dem Transformationssatz

$$\int_{U_1} f(\gamma(x)) \cdot |\det D\gamma(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{V_1} f(y) \,\mathrm{d}y$$

Nun sind aber ∂Q und $\partial\gamma(Q)$ Nullmengen und $V_1 = \mathrm{Int}(\gamma(U))$. Also erhält man auch

$$\int_Q f(\gamma(x)) \cdot |\det D\gamma(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\gamma(Q)} f(y) \,\mathrm{d}y$$

Wegen Stetigkeit ist aber $\det D\gamma(x) > 0$ für alle $x \in Q$ oder $\det D\gamma(x) < 0$ für alle $x \in Q$. Also gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma(Q)} f(y) \,\mathrm{d}y \quad \text{oder} \quad \int_\gamma \omega = -\int_{\gamma(Q)} f(y) \,\mathrm{d}y$$

Definition. Schließlich können wir den Formalismus auch noch sinnvoll auf den Fall $k = 0$ erweitern. Setze $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Eine 0-Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\gamma\colon \mathbb{R}^0 \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für eine 0-Form f auf V und eine 0-Kurve $\gamma\colon \mathbb{R}^0 \to V$ setze

$$\int_\gamma f = f(\gamma(0))$$

Definition. Sei nun $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Setze

$$F_k(V) = \{\gamma\colon Q \to V : \gamma \ k\text{-Fläche}\}$$

Die k-Kettengruppe $C_k(V)$ wird definiert durch

$$C_k(V) = \{C\colon F_k(V) \to \mathbb{Z} : C(\gamma) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \gamma\}$$

Wir schreiben ein $C \in C_k(V)$ auch als

$$C = \sum_\gamma C(\gamma)\gamma$$

Für eine k-Form ω auf V und eine Kette $C \in C_k(V)$ definieren wir das Integral durch

$$\int_C \omega = \sum_\gamma C(\gamma) \int_\gamma \omega$$

Im Folgenden benutzen wir die Notation (für Intervalle)

$$I_1 \times \cdots \times \widehat{I_i} \times \cdots \times I_n := I_1 \times \cdots \times I_{i-1} \times I_{i+1} \times \cdots \times I_n$$

Wir benutzen diese Notation auch für andere Objekte.

Definition. Sei nun $\gamma\colon Q \to V$ eine k-Fläche mit $k \geq 1$. Wir definieren auf natürliche Weise den orienterten Rand $\partial\gamma \in C_{k-1}(V)$ wie folgt: Sei $Q = I_1 \times \cdots \times I_k$, wobei $I_i = [a_i, b_i]$. Für $1 \leq i \leq k$ sei $Q_i = I_1 \times \cdots \times \widehat{I_i} \times \cdots \times I_k \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ und definiere $\gamma_i^j\colon Q_i \to V$, $j = 0, 1$, durch

$$\begin{aligned}\gamma_i^0(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k) &= \gamma(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_k)\\ \gamma_i^1(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k) &= \gamma(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_k)\end{aligned}$$

Dann sind γ_i^0 und γ_i^1 $(k-1)$-Flächen in V. Setze

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (\gamma_i^1 - \gamma_i^0)$$

Satz 8 (Stokes)**.** *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$ und ω eine $(k-1)$-Form auf V. Weiterhin sei $\gamma\colon Q \to V$ eine k-Fläche. Dann gilt*

$$\int_\gamma \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

Beweis. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 1 aus §19. Sei also im Folgenden $k \geq 2$. Weiterhin sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ und setze

$$Q_i = [a_1, b_1] \times \cdots \times \widehat{[a_i, b_i]} \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

Sei zuerst $\gamma = \iota$, wobei $\iota(x) = x$ für alle $x \in U$. Insbesondere ist $k = n$. In Normaldarstellung hat ω die Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

Wegen Linearität genügt es also die Behauptung für $\omega = f \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ zu zeigen. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n =\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n =\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

Wegen $\gamma^*\mathrm{d}\omega = \iota^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega$ folgt also mit Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{d}\omega &= (-1)^{i-1} \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = (-1)^{i-1} \int_{Q_i} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \mathrm{d}x_k =\\ &= (-1)^{i-1} \int_{Q_i} f(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_k) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \mathrm{d}x_k\end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\int_{\partial\gamma} \omega$. Es ist

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_{\gamma_j^1} \omega - \int_{\gamma_j^0} \omega \right) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_{Q_j} (\gamma_j^1)^* \omega - \int_{Q_j} (\gamma_j^0)^* \omega \right)$$

Sei nun für $1 \leq j \leq k$, $m \leq 1$, $\gamma_j^m = (\gamma_{j,1}^m, \dots, \gamma_{j,k}^m)$ die Komponentenzerlegung. Dann ist

$$(\gamma_j^m)^* \omega = (f \circ \gamma_j^m) \, \mathrm{d}\gamma_{i,1}^m \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}\gamma_{j,i}^m} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\gamma_{i,k}^m$$

Nun ist aber $\gamma = \iota$, d.h. $\gamma_{j,l}^m(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_k) = x_l$ für $l \neq j$ und

$$\gamma_{j,j}^m = \begin{cases} a_j & \text{für } m = 0 \\ b_j & \text{für } m = 1 \end{cases}$$

Somit ist $\mathrm{d}\gamma_{j,j}^m = 0$, also $(\gamma_j^m)^* \omega = 0$ für $j \neq i$. Weiterhin ist $\mathrm{d}\gamma_{i,l}^m = \mathrm{d}x_l$ für $l \neq i$, also

$$\begin{aligned} \int_{\partial\gamma} \omega &= (-1)^{i-1} \left(\int_{Q_i} (\gamma_i^1)^* \omega - \int_{Q_i} (\gamma_i^0)^* \omega \right) = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{Q_i} (f \circ \gamma_i^1 - f \circ \gamma_i^0) \, \mathrm{d}x_1 \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \dots \mathrm{d}x_k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{Q_i} \big(f(x_1, \dots, b_i, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, a_i, \dots, x_k) \big) \, \mathrm{d}x_1 \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \dots \mathrm{d}x_k \end{aligned}$$

Damit ist der erste Fall bewiesen.

Sei nun γ beliebig. Wie oben sei $\iota \colon U \to U$ die Identität. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathrm{d}\omega &= \int_{\gamma \circ \iota} \mathrm{d}\omega = \int_\iota \gamma^*(\mathrm{d}\omega) = \int_\iota \mathrm{d}(\gamma^* \omega) = \int_{\partial\iota} \gamma^* \omega = \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_{\iota_j^1} \gamma^* \omega - \int_{\iota_j^0} \gamma^* \omega \right) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_{\gamma \circ \iota_j^1} \omega - \int_{\gamma \circ \iota_j^0} \omega \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_{\gamma_j^1} \omega - \int_{\gamma_j^0} \omega \right) = \int_{\partial\gamma} \omega \end{aligned}$$

□

21 Die L^p-Räume und Fourierreihen

Definition. Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f heißt *messbar*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Insbesondere ist jede integrierbare Funktion messbar.

Satz 1. *Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann ist f messbar genau dann, wenn f_Q für alle Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar ist.*

Beweis. Die Richtung von links nach rechts ist trivial. Sei also die rechte Seite erfüllt. Wähle dann eine Folge $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Quadern mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$.

Wähle für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(s_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen und eine Nullmenge A_i mit

$$\lim_{k\to\infty} s_{ik}(x) = f_{Q_i}(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus A_i.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $s_{ik}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_i$. Setze nun $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Dann ist A eine Nullmenge. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} s_{ik}.$$

Dann ist s_k eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Also ist f messbar. □

Bemerkung. Aus Satz 1 folgt, dass jede lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ messbar ist.

Satz 2. *Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:*

(a) $f + g$ und fg sind messbar.

(b) Ist $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ eine Nullmenge, so ist $\frac{1}{f}$ messbar.

(c) Ist I ein Intervall und $h\colon I \to \mathbb{R}$ stetig sowie $f(\mathbb{R}^n) \subseteq I$, so ist $h \circ f$ messbar.

Beweis. (a) und (b) sind klar. Sei etwa $I = [a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wähle eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen die fast überall gegen f konvergiert. Wähle ein $b' \in (a, b)$ und definiere $\tilde{f}_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{falls } f_k(x) \in I \\ a & \text{falls } f_k(x) < a \\ b' & \text{falls } f_k(x) \geq b \end{cases}$$

Dann ist $(\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und es gilt natürlich, dass $\tilde{f}_k(\mathbb{R}^n) \subseteq I$. Setze nun $\tilde{h}_k = h \circ \tilde{f}_k$. Wegen der Stetigkeit von h konvergiert $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen $h \circ f$. Setze schließlich $Q_k = [-k, k]^n$ und $h_k = \tilde{h}_k \cdot 1_{Q_k}$. Dann ist $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen $h \circ f$ konvergiert. □

Satz 3. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(1) f ist integrierbar.

(2) f ist messbar und es existiert ein integrierbares $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $|f| \leq g$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist trivial. Sei zuerst $f \geq 0$ und $(\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Wähle ein integrierbares $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$ und setze $f_k = \min(\tilde{f}_k, g)$. Dann ist f_k integrierbar, $|f_k| \leq g$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f. Also ist nach Lebesgue f integrierbar. Ist f beliebig, so erhält man, dass f^+ und f^- integrierbar sind, und daher auch die Integrierbarkeit von f. □

Korollar. *Seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist fg integrierbar.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $|f| \leq c$. fg ist messbar und es gilt $|fg| \leq c|g|$, wobei $c|g|$ integrierbar ist. $\square$

Satz 4. *Sei $(f_K)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f messbar.*

Beweis. Sei zuerst $|f_k| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, dass $f \cdot 1_Q$ für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar ist. Sei also $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Nach dem obigen Korollar ist dann $f_k \cdot 1_Q$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ integrierbar. Außerdem gilt $|f_k \cdot 1_Q| \leq 1_Q$. Aber $(f_k \cdot 1_Q)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise fast überall gegen $f \cdot 1_Q$. Also ist nach Lebesgue $f \cdot 1_Q$ sogar integrierbar.

Sei nun f_k beliebig und $h\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ eine injektive stetige Funktion. Dann ist nach Satz 2 $(h \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen $h \circ f$ konvergiert. Wegen $|h \circ f_k| \leq 1$ ist also $h \circ f$ messbar. Somit also nach Satz 2 $f = h^{-1} \circ h \circ f$ messbar. $\square$

Konvention. Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f messbar ist, wenn f_A messbar ist. Außerdem setzen wir $\|f\|_1 := \|f_A\|_1$.

Definition. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$. Sei dann $\mathscr{L}^p(A)$ die Menge aller messbaren $f\colon A \to \mathbb{R}$, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Es ist also nach Satz 3 $\mathscr{L}^1(A)$ die Menge aller integrierbaren $f\colon A \to \mathbb{R}$. Für $f \in \mathscr{L}^p(A)$ setze

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bemerkung. $\mathscr{L}^p(A)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, denn offenbar ist $\mathscr{L}^p(A)$ abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. Weiterhin seien $f, g \in \mathscr{L}^p(A)$. Nun sind $f+g$ und $|f+g|^p$ messbar. Weiterhin ist $|f+g|^p \leq \big(2\max(|f|,|g|)\big)^p = 2^p \max(|f|^p, |g|^p)$. Also ist nach Satz 3 $|f+g|^p$ integrierbar und daher $f + g \in \mathscr{L}^p(A)$.

Bemerkung. Wir wollen zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm ist. Offenbar ist für $c \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{L}^p(A)$

$$\|cf\|_p = \left(\int_A |cf|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|c|^p \int_A |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = |c|\|f\|_p.$$

Für die Dreiecksungleichung brauchen wir noch zwei Vorbereitungen.

Lemma 5. *Seien $a, b > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Beweis. Es ist zu zeigen (durch einfache Substitution), dass $t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}$ für $t \geq 1$ gilt. Nun ist dies richtig für $t = 1$. Differenziert man beide Seiten nach t, so gilt die Ungleichung für $t \geq 1$, denn $\frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} \leq \frac{1}{p}$. Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 6 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiterhin seien $f \in \mathscr{L}^p(A)$ und $g \in \mathscr{L}^q(A)$. Dann ist fg integrierbar und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Beweis. Seien ohne Einschränkung $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Für $x \in A$ gilt nach Lemma 5

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q \tag{$*$}$$

Da die rechte Seite integrierbar und fg messbar ist, ist nach Satz 3 fg integrierbar. Weiterhin ergibt sich aus $(*)$ durch Integration

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_A |f|^p \, \mathrm{d}x + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_A |g|^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad \square$$

Satz 7. *Seien $f, g \in \mathscr{L}^p(A)$. Dann gilt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Beweis. Für $p = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $p > 1$ und setze $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Dann gilt $p - 1 = \frac{p}{q}$. Für $h \in \mathscr{L}^p(A)$ ist also $|h|^{p-1} \in \mathscr{L}^q(A)$. Wir erhalten

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$$

Dabei sind $|f|, |g| \in \mathscr{L}^p(A)$, $|f + g|^{p-1} \in \mathscr{L}^q(A)$. Somit gilt nach Satz 6:

$$\begin{aligned} \int_A |f + g|^p \, \mathrm{d}x &\leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_A |f + g|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Ist $|f + g| = 0$ fast überall, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls folgt sie durch Division durch $(\int_A |f + g|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}$. $\square$

Nun ist $\| \cdot \|_p$ auf $\mathscr{L}^p(A)$ nur eine Halbnorm, denn es gilt

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ fast überall}$$

Wir lösen dieses Dilemma, indem wir faktorisieren.

Definition. Sei

$$\mathcal{N}(A) := \{f : A \to \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall}\}$$

und $L^p(A) = \mathscr{L}^p(A)/\mathcal{N}(A)$ der Quotientenvektorraum nach diesem Untervektorraum. Hqrtsxklt*(217k9. Die Elemente von $L^p(A)$ sind also Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_p$ definiert durch

$$f \sim_p g \iff f - g \in \mathcal{N}(A)$$

für $f, g \in \mathscr{L}^p(A)$. Setze $[f] = \{g \in \mathscr{L}^p(A) : f \sim_p g\}$ für $f \in \mathscr{L}^p(A)$. Wir können dann $\| \cdot \|_p$ auf $L^p(A)$ definieren durch $\|[f]\|_p = \|f\|_p$. Dies ist wohldefiniert und liefert eine Norm auf $L^p(A)$.

Bemerkung. Wir unterscheiden im Folgenden nicht zwischen $\mathscr{L}^p(A)$ und $L^p(A)$ und schreiben $f \in L^p(A)$ für $f\colon A \to \mathbb{R}$ statt $[f] \in L^p(A)$. Sofern nötig, notieren wir Elemente von $\mathscr{L}^p(A)$ mit rosa Schrift.

Wir wollen zeigen, dass $L^p(A)$ eine Banachraum ist. Hierzu benötigen wir:

Satz 8 (Fatou)**.** *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Sei $f_k > 0$ für alle k und die Folge $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Für $h, j \in \mathbb{N}$ setze $g_{h,j} = \min(f_k, \dots, f_{k+j})$ und definiere $g_k\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $g_k(x) = \inf\{f_i(x)\colon i \geq k\}$. Nach dem Satz von Levi ist dann g_k integrierbar, da $(g_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton fallend gegen g_k konvergiert. Sei c eine obere Schranke für $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise monoton wachsend gegen f. Also ist nach Levi f integrierbar und es gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x \leq c.$$

Da dies auch für jede Teilfolge von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt, folgt die Behauptung. □

Satz 9 (Riesz-Fischer)**.** *$L^p(A)$ ist ein Banachraum.*

Beweis. Für $p = 1$ haben wir das schon gezeigt. Sei als $p > 1$ und schreibe L^p für $L^p(A)$. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in L^p. Wir suchen $f \in L^p$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0$. Hierzu konstruieren wir zuerst einen Kandidaten f. Sei hierzu $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ mit

$$\|f_k - f_{k_i}\|_p \leq \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{für alle } k \geq k_i$$

Wir wollen zeigen, dass $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise konvergiert. Schreibe hierzu $f_{k_i} = f_{k_0} + \sum_{j=0}^{i-1}(f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$. Setze nun $g_j = f_{k_{j+1}} - f_{k_j}$. Es genügt zu zeigen, dass $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ fast überall konvergent ist, es genügt sogar dies auf jedem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Setze hierzu $q = p/(p-1)$. Da $1_Q \in \mathscr{L}^q$ ist, gilt nach Satz 6, dass $g_j 1_Q$ integrierbar ist und

$$\int \left(\sum_{j=0}^{i} g_j 1_Q\right) \mathrm{d}x \leq \sum_{j=0}^{i} \|g_j\|_p \cdot \|1_Q\|_q \overset{(*)}{\leq} \|1_Q\|_q$$

Nach Levi ist also $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ fast überall absolut konvergent. Somit konvergiert auch $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass $f \in L^p$. Da alle f_{k_i} messbar sind, ist nach Satz 4 auch f messbar. Weiterhin konvergiert die Folge $(|f_{k_i}|^p)_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen $|f|^p$. Nach Fatou ist also $|f|^p$ integrierbar, und somit insgesamt $f \in L^p$. Schließlich zeigen wir noch, dass $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ gegen f konvergiert. Sei dazu $i \in \mathbb{N}$. Betrachte die Folge $(|f_{k_j} - f_{k_i}|^p)_{j\geq i}$. Es gilt für $j \geq i$ $|f_{k_j} - f_{k_i}|^p \geq 0$,

$$\int |f_{k_j} - f_{k_i}|^p \,\mathrm{d}x = \|f_{k_j} - f_{k_i}\|_p^p \leq \frac{1}{2^{(i+1)p}}$$

und $(|f_{k_j} - f_{k_i}|^p)_{j\geq i}$ konvergiert fast überall punktweise gegen $|f - f_{k_i}|^p$. Nach Fatou folgt also $\int |f - f_{k_i}|^p \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^{(i+1)p}}$. Somit konvergiert also $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ gegen f. Da aber $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ eine Cauchyfolge ist, gilt dies auch für diese Folge. $\square$

Korollar. *Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_p$ gegen f konvergiert, so existiert eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert.*

Satz 10. *Sei $p \geq 1$, $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(a) Die Treppenfunktionen sind dicht in L^p.

(b) Die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht in L^p.

Beweis.

(a) Sei $f \in L^p$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Treppenfunktion h mit $\|f-h\|_p < \varepsilon$. Sei hierzu zuerst f beschränkt mit kompaktem Träger. Da f messbar ist, gibt es eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Sei etwa $|f| \leq c$ und Q ein kompakter Quader mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq Q$. Wir können o.E. annehmen, dass $|h_k| \leq c$ und $\operatorname{supp}(h_k) \subseteq Q$ gilt. Dann gilt $|h_k - f|^p \leq (|h_k| + |f|)^p \leq (2c)^p \cdot 1_Q \in \mathscr{L}^1$ und $(|h_k - f|^p)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen 0. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert also $\|h_k - f\|_p^p$ gegen 0, was das Gewünschte in diesem Fall liefert.

Für beliebiges $f \in L^p$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k = [-k, k]^n$ und $f_k = \min\{\max\{f, -k\}, k\}1_{Q_k}$. Dann ist f_k messbar und beschränkt mit kompaktem Träger, also $f_k \in \mathscr{L}^p$. Weiterhin $|f - f_k|^p \leq |f|^p \in \mathscr{L}^1$ und $(|f - f_k|^p)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen 0. Nach Lebesgue konvergiert also auch $\|f - f_k\|_p^p$ gegen 0. Indem man den ersten Teil auf f_k anwendet, folgt die Behauptung.

(b) Wegen (a) genügt es zu zeigen: Für jede Treppenfunktion h und alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger, sodass $\|h - g\|_p < \varepsilon$. Wegen Dreiecksungleichung genügt es dies für den Fall zu zeigen, dass $h = 1_Q$ für einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Dabei können wir annehmen, dass $\operatorname{Int}(Q) \neq \varnothing$, da sonst $v(Q) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle einen offenen Quader R mit $\overline{Q} \subseteq R$ und $v(R) < v(Q) + \varepsilon^{1/p}$. Man sieht leicht, dass es eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g \mid Q = 1 \qquad g \mid \mathbb{R}^n \setminus R = 0 \qquad 0 \leq g - 1_Q \leq 1$$

Dann gilt $0 \leq g - 1_Q \leq 1_R - 1_Q$ und $|g - 1_Q|^p \leq g - 1_Q$, dann

$$\|g - 1_Q\|_p^p \leq \int (1_R - 1_Q)\,\mathrm{d}x < \varepsilon^{1/p}$$

$\square$

Bemerkung. Von besonderem Interesse sind die Räume $L^2(A)$. In diesem Fall ist die Norm $\|\cdot\|_2$ durch ein Skalarprodukt induziert. Wir können nämlich für $f, g \in L^2(A)$ setzen

$$\langle f, g\rangle = \int_A fg \,\mathrm{d}x$$

Nach Satz 6 ist fg integrierbar. Offenbar ist dann $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und es gilt $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. $L^2(A)$ ist also ein *Hilbertraum*, d.h. ein Vektorraum mit Skalarprodukt, für den der zugehörige normierte Raum vollständig ist. Man kann alles auf komplexwertige Funktionen erweitern. Dabei definieren wir:

Definition. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{C}$, so ist f messbar (integrierbar) genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar (integrierbar) sind. Ist solch ein f integrierbar, so setzen wir

$$\int_A f \,\mathrm{d}x = \int_A \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}x + i \int_A \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}x.$$

Für $p > 1$ und messbares $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei dann $\mathscr{L}^p(A, \mathbb{C})$ die Menge aller messbaren $f\colon A \to \mathbb{C}$, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Für $f \in \mathscr{L}^p(A, \mathbb{C})$ setze

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^p(A, \mathbb{C})$ ist dann die Faktorisierung von $\mathscr{L}^p(A, \mathbb{C})$ nach $\{f\colon A \to \mathbb{C}\colon f = 0 \text{ fast überall}\}$. Auf $L^2(A, \mathbb{C})$ haben wir ein Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_A f\,\overline{g}\,\mathrm{d}x$$

mit $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Also ist $L^2(A, \mathbb{C})$ ein komplexer Hilbertraum.

Wir untersuchen nun Hilberträume im Allgemeinen. Sei also V ein reeller oder komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Die Norm $\|\cdot\|$ auf V sei definiert durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Definition. Eine Familie $(e_j)_{j\in J}$ aus V ist ein *Orthonormalsystem* (ONS), wenn $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in J$ gilt.

Beispiel. Sei $I = [0, 2\pi]$ und $V = L^2(I, \mathbb{C})$ mit dem etwas modifizierten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}x.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere $f_k\colon I \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{ikt}$. Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem, denn es gilt

$$\langle f_k, f_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{k,l}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$.

Beispiel. Sei $I = [0, 2\pi]$ und $V = L^2(I)$ mit dem etwas modifizierten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg\,\mathrm{d}t.$$

Dann ist $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\right)$ ein ONS. Dies folgt unmittelbar aus $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$ und $\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$.

Lemma 11. *Seien $e_0, \dots, e_m$ orthonormale Vektoren in V und sei $W = \operatorname{span}\{e_0, \dots, e_m\}$. Für $f \in V$ setze $P_W(f) = \sum_{j=0}^m \langle f, e_j \rangle e_j$. Dann gilt für alle $f \in V$:*

(a) $f - P_W(f) \perp W$.

(b) $\|f - P_W(f)\| = \min\{\|f - g\| \colon g \in W\}$ und $P_W(f)$ ist der einzige Punkt in W, in dem das Minimum angenommen wird.

Beweis.

(a) Es gilt für alle $k = 0, \dots, m$

$$\left\langle f - \sum_{j=0}^m \langle f, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0.$$

(b) Für $g \in W$ gilt

$$f - g = (f - P_W(f)) + \underbrace{(P_W(f) - g)}_{\in W},$$

also folgt mit (a) $\|f - g\|^2 = \|f - P_W(f)\|^2 + \|P_W(f) - g\|^2 \geq \|f - P_W(f)\|^2$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Konvention. Eine Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k$ ist die Folge $\left(\sum_{k=-m}^m f_k\right)_{m \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen. Ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k$ konvergent, so bezeichnen wir mit $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k$ auch den Grenzwert.

Sei nun $(e_j)_{j \in J}$ ein ONS in V, wobei $J = \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{Z}$. Wir untersuchen die Frage, ob es eine Reihe $\sum_{j \in J} a_j e_j$ mit Skalaren a_j gibt, so dass $f = \sum_{j \in J} a_j e_j$ für ein gewähltes $f \in V$ gilt.

Bemerkung. Da das Skalarprodukt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung stetig ist, gibt es nur einen Kandidaten für solch eine Reihe, denn ist $f = \sum_{j \in J} a_j e_j$, so gilt für $k \in J$:

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j \in J} a_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle e_j, e_k \rangle = a_k.$$

Definition. Für $f \in V$ sei die Fourierreihe von f bezüglich $(e_j)_{j \in J}$ definiert durch

$$\mathscr{F}(f) = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Die $\langle f, e_j \rangle$ heißen Fourierkoeffizienten von f. Mit $\mathscr{F}_n(f)$ bezeichnen wir die n-te Partialsumme von $\mathscr{F}(f)$.

Satz 12. *Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein ONS im Hilbertraum V. Für $f \in V$ gilt dan*

(a) die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle| \leq \|f\|^2.$$

(b) Die Fourierreihe $\mathscr{F}(f)$ ist konvergent.

(c) Die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2$$

gilt genau dann, wenn $\mathscr{F}(f) = f$ gilt, d.h. wenn die Fourierreihe von f gegen f konvergiert.

Beweis.

(a) Für $m \in \mathbb{N}$ sei $W_m = \operatorname{span}\{e_j : j \in J, |j| \leq m\}$. Dann ist mit der Notation des obigen Lemmas $P_{W_m}(f) = \mathscr{F}_m(f)$ und es gilt nach Lemma 11

$$\|f\|^2 = \|\mathscr{F}_m(f)\|^2 + \|f - \mathscr{F}_m(f)\|^2 \geq \|\mathscr{F}_m(f)\|^2.$$

Daraus folgt die Behauptung, da $(e_j)_{j \in J}$ ein ONS ist.

(b) Nach (a) ist $\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2$ konvergent. Somit existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein m_0 mit

$$\|\mathscr{F}_l(f) - \mathscr{F}_m(f)\|^2 < \varepsilon$$

für alle $l, m \geq m_0$. Somit erfüllt $\mathscr{F}(f)$ die Cauchy-Bedingung, ist also wegen der Vollständigkeit von V konvergent.

(c) Nach dem bisher Bewiesenen gilt

$$\|f\|^2 = \|\mathscr{F}_m(f)\|^2 + \|f - \mathscr{F}_m(f)\|^2.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Definition. Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein ONS ins V wie oben und $W = \operatorname{span}\{e_j : j \in J\}$. Dann ist $(e_j)_{j \in J}$ *vollständig*, wenn $\overline{W} = V$.

Satz 13. *Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein vollständiges ONS im Hilbertraum V, wobei $J = \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{Z}$. Dann konvergiert für jedes $f \in V$ die Fourierreihe von f gegen f.*

Beweis. Sei $W = \operatorname{span}\{e_j : j \in J\}$ und für $m \in \mathbb{N}$ sei $W_m = \{e_j : j \in J, |j| \leq m\}$. Sei $f \in V$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Vollständigkeit von $(e_j)_{j \in J}$ existiert dann ein $g \in W$ mit $\|f - g\| < \varepsilon$. Dann existiert ein m_0 mit $g \in W_{m_0}$. Sei nun $m \geq m_0$. Dann ist auch $g \in W_m$ und somit gilt nach Lemma 11

$$\|f - \mathscr{F}_m(f)\| \leq \|f - g\| < \varepsilon.$$ □

Beispiel. Sei $I = [0, 2\pi]$ und wieder $V = L^2(I, \mathbb{C})$ mit dem etwas modifizierten Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}x.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere $f_k : I \to \mathbb{C}$ durch $f_k(t) = e^{ikt}$. Dann ist $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein ONS in V. Wir wollen zeigen, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vollständig ist. Sei hierzu $W = \operatorname{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Weiterhin sei S die Menge alle stetigen Funktionen $h : I \to \mathbb{C}$ mit $h(0) = h(2\pi)$. Nach Analysis 2 ist dann $S \subseteq \overline{W}$. Aber nach Satz 10 (etwas modifiziert) ist S dicht in V, d.h. $\overline{S} = V$, also $\overline{W} = V$. Also ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vollständig. Somit konvergiert für alle $f \in V$ die Fourierreihe von f bezüglich $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ gegen f (in V). Wir schreiben noch einmal hin, was dies explizit bedeutet. Sei $f \in L^2(I, \mathbb{C})$. Für $k \in \mathbb{Z}$ setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f \cdot e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen f, d.h. es gilt

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|f(t) - \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}\right|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Analog zeigt man, dass das ONS $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\right)$ vollständig ist (im modifizierten $L^2(I)$).

Schließlich behandeln wir noch die Frage, wann im obigen Fall die Fourierreihe von f punktweise oder sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. Dabei setzen wir f 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

Definition. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch. f ist *stückweise (stetig) differenzierbar*, wenn es eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = 2\pi$ von $[0, 2\pi]$ gibt, sodass $f|[a_k, a_{k+1}]$ für $k < r$ (stetig) differenzierbar ist.

Satz 14. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion, die stückweise stetig differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig konvergiert, denn ist dann g der punktweise Limes, so folgt, dass $f = g$ fast überall ist, da ja diese Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen f konvergiert. Sei nun $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$ die Fourierreihe von f. Da $\|a_k e^{ikt} + a_{-k}ke^{-ikt}\|_\infty \le |a_k| + |a_{-k}|$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|$ beschränkt ist. Nach Voraussetzung ist f' stückweise stetig, und daher $f'|[0, 2\pi]$ in eine Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a'_k e^{ikt}$ entwickelbar. Dabei gilt

$$2\pi a'_k = \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = f(t)e^{-ikt}\Big|_0^{2\pi} + ik\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = 2\pi i k a_k.$$

Somit gilt $|a_k| = \frac{|a'_k|}{|k|} \le \frac{1}{2}\left(|a'_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right)$ für $k \neq 0$. Aber $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a'_k|^2$ ist nach der Besselschen Ungleichung konvergent und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$. $\square$